Recherche opérationnelle

EL BOUANANI

Département de Statistiques et Mathématiques
Appliquées à l'Économie et à la Gestion
FSJES Ain Sebaa

2018/2019

Plan du cours

Chapitre 1 : Programmes linéaires et modélisation

1. Introduction

Définition de la recherche opérationnelle

La recherche opérationnelle est un ensemble de méthodes scientifiques pour résoudre des problèmes d'optimisation liés aux organisations du monde réel.

La RO est aussi appelée aide à la décision : elle permet d'assister la prise de décision en fournissant une réponse scientifique à des problèmes organisationnels complexes (problèmes de gestion par exemple).

Exemples de problèmes

- Comment aller le plus vite de Casablanca à Rabat en voiture ?
- Comment investir ses 10000 Dh d'économie de sorte à maximiser le profit obtenu après deux ans ?
- Comment ordonnancer les tâches d'un projet en fonction de la main d'oeuvre, tout en minimisant sa durée ?
- Trouver un plus court chemin entre deux villes.
- Emplois du temps : Planifier l'horaire des cours ou des examens, en tenant compte des différentes ressources (étudiants, professeurs, locaux,...)
- Définir le nombre du personnel dans une gare de trains ou une banque suivant la fréquence de la clientèle.

En conclusion, la recherche opérationnelle, face à un problème pratique de décision, cherche à :

- faire le mieux : coût minimal, meilleur profit, plus courte distance, le plus rapide...
- avec les ressources disponibles : temps machine, postes de travail, mémoire, ressource homme, matière première, moyens de transport. . .

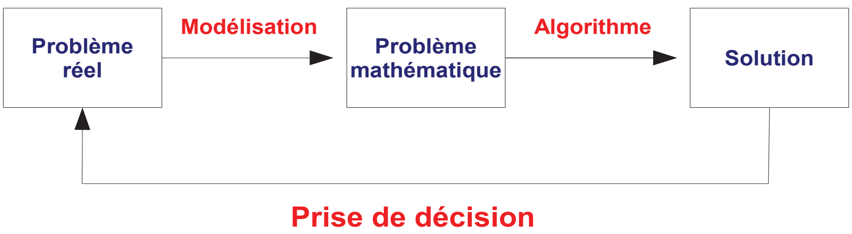
La RO repose sur la construction des modèles (**modélisation**), et ce en fonction des problèmes posés.
Il existe plusieurs techniques de modélisation comme **la programmation linéaire**, la théorie des graphes, etc.

Elle est un « carrefour » entre les mathématiques (modélisation), l'informatique (algorithmique) et l'économie (gestion, stratégie).

Etapes d'un processus de RO

- Détecter et comprendre le problème
  - Objectifs, contraintes
  - Données disponibles (variables de décision, paramètres, quantités de matière première par ex...)
- Traduire le problème réel sous forme de modèle mathématique (programme linéaire par ex.)
- Résolution du modèle
  - Choix d'un algorithme (Simplexe par ex.)
  - Utilisation des logiciels spécialisés (Excel, Lindo,...)
- Validation du modèle et des résultats :
  - le modèle développé est-il conforme à la réalité ?
  - les résultats sont-ils valides et satisfaisantes ?
- Prise de décision

Etapes d'un processus de RO



La programmation linéaire

Définition

Les problèmes de programmation linéaire (PL) sont des problèmes d'optimisation où on maximise (ou on minimise) une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

La programmation linéaire est un des domaines les plus utilisés de la RO. Elle permet de résoudre des problèmes de gestion et particulièrement où le gestionnaire doit déterminer, face à différentes possibilités, l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise (main d'œuvre, matières premières, capitaux, espace,...) et qui sont disponibles en quantité limitée, pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts.

2. Exemples de programmes linéaires

Exemple 1 :

Une entreprise de fabrication de châssis envisage la production de deux nouveaux modèles au moyen des capacités résiduelles de ses trois ateliers. Il s'agit respectivement d'un châssis en aluminium et d'un châssis en bois. Le premier produit nécessite le passage dans le premier atelier pour fabriquer le cadre en aluminium et dans le troisième atelier où le verre est monté sur le châssis. Tandis que le second produit nécessite le passage dans le deuxième atelier pour fabriquer le cadre en bois et dans le troisième atelier où le verre est monté sur le châssis.

Les marges unitaires, les temps de fabrication de chacun des produits dans chacun des ateliers ainsi que les capacités hebdomadaires résiduelles de ces ateliers sont donnés au tableau suivant :

	Produit 1 (châssis aluminium) (heures/produit)	Produit 2 (châssis bois) (heures/produit)	Capacité disponible (heures/semaine)
Atelier 1	1	0	4
Atelier 2	0	2	12
Atelier 3	3	2	18
Marge	**3** UM	**5** UM	

La question qui se pose est la suivante : combien faut-il produire de châssis de chaque type par semaine pour maximiser le profit net ?

1. Identification des variables de décision

La première étape consiste à choisir les variables du problème.

Les quantités que le modèle doit déterminer sont les productions de châssis par semaine. Posons donc :

x_1 : nombre de châssis du produit 1 (châssis en aluminium)

x_2 : nombre de châssis du produit 2 (châssis en bois).

2. Expression de l'objectif

La deuxième étape consiste à formuler l'objectif.

L'entreprise désire maximiser son profit net. La marge étant de 3 pour le premier type de châssis et de 5 pour le second, l'objectif (ou *fonction économique*) s'exprime comme suit :

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

3. Expression des contraintes

La 3ème étape est la formulation des contraintes du problème.

Le temps pour assembler 1 châssis de type 1 dans l'atelier 1 est de 1 heure où il reste 4 heures disponibles. D'où la contrainte de capacité de l'atelier1 :

$$x_1 \leq 4$$

De même, pour les contraintes de capacités des deux autres ateliers :

$$2x_2 \leq 12 \qquad \text{et} \qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

D'autre part, les quantités produites ne peuvent être négatives.
Mathématiquement : $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Finalement, le problème peut être formulé en programme linéaire :

$$(P_1)\left\{\begin{array}{l} \max\ z = 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

Exemple 2 :

Une raffinerie achète deux types de pétroles bruts dont elle retire de l'essence, du gazole et du fioul dans les pourcentages suivants :

Produits finis	Brut 1	Brut 2
Essence	30	25
Gazole	40	25
fioul	30	50

La raffinerie doit satisfaire à la demande de :
125 10^4 tonnes d'essence, 135 10^4 tonnes de gazole et 180 10^4 tonnes de fioul
L'achat d'une tonne de brut 1 coute 700 UM et une tonne de brut 2 coute 500 UM.
Quelles quantités de ces pétroles bruts devra t-on acheter pour répondre à la demande au moindre coût ?

- **Compréhension du problème :**

  Le problème est de minimiser le coût d'achat de cette raffinerie. Ce coût d'achat évolue en fonction des quantités de brut 1 et 2 à acheter.

- **Identifications des variables de décision :**

  x_1 : quantité de brut 1 à acheter

  x_2 : quantité de brut 2 à acheter

- **Fixation de l' objectif** :

  minimisation du coût

$$\min\ z = 700x_1 + 500x_2$$

- **Fixation de l' objectif** :

  minimisation du coût $\min z = 700x_1 + 500x_2$
- **Mise en équations des contraintes économiques :**

  les variables x_1 et x_2 vérifient 3 contraintes :

  Contrainte d'essence : $0,3x_1 + 0,25x_2 \geq 125\ 10^4$

  Contrainte de gazole : $0,4x_1 + 0,25x_2 \geq 135\ 10^4$

  Contrainte de fioul : $0,3x_1 + 0,5x_2 \geq 180\ 10^4$
- **Restriction des signes** : contrainte de positivité $x_1;\ x_2 \geq 0$
- **Modélisation mathématique**

$$(P_2)\ \begin{cases} \min\ z = 700x_1 + 500x_2 \\ 0,3x_1 + 0,25x_2 \geq 125\ 10^4 \\ 0,4x_1 + 0,25x_2 \geq 135\ 10^4 \\ 0,3x_1 + 0,5x_2 \geq 180\ 10^4 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Formulation générale d'un PL

- **Fonction objectif (économique) :**

$$\max \text{ (ou min) } z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

- **Contraintes :**

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & \leq, =, \geq \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & \leq, =, \geq \quad b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & \leq, =, \geq \quad b_m \end{array}$$

- **Contraintes de positivité (non négativité) :**

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, ..., n$$

Avec,
x_j : variables de décision (inconnues)
a_{ij}, b_i, c_j : paramètres du programme linéaire (connues).

Formulation matricielle

Posons :

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vecteur de $\mathbb{R}^n$

où $x_1, x_2, ..., x_n$ sont les variables de décision.

$c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, b_2, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{(matrice de type } (m \times n))$$

$c^T x =< c, x >= c_1x_1 + ... + c_nx_n$ (produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$).

Alors, le programme linéaire peut s'écrire sous la forme :

$$(PL)\ \begin{cases} \min / \max\ z = c^T x \\ Ax \leq, =, \geq\ b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Terminologie

- **Solution réalisable (solution admissible) :**

  $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est une solution réalisable si x satisfait toutes les contraintes c-à-d $Ax \; \{\leq, =, \geq\} \; b$ et $x \geq 0$.

- **Ensemble réalisable (région admissible) :**

  Ensemble de toutes les solutions réalisables.

- **Solution optimale :**

  Solution réalisable où la fonction objectif atteint la meilleure valeur (maximum ou minimum).

Remarques :

1. Plusieurs solutions optimales sont possibles.
2. Géométriquement, la région admissible correspond à un *polyèdre* de $\mathbb{R}^n$ (voir chapitre 2).

Exemple 3 :

L'Ile des cocotiers produit du pétrole, des bananes et du soja. Les marchands internationaux sont plus intéressés par le pétrole que par les bananes et le soja, ce qui fait qu'il y a un déficit à l'exportation des produits agricoles sur cette île.

Pour soutenir l'agriculture, le gouvernement oblige les acheteurs de pétrole à acheter aussi des bananes et du soja. Les achats sur cette île se feront par lots qui peuvent être de 2 types :

des lots à dominante BANANE	des lots à dominante SOJA
chaque lot contient	chaque lot contient
pétrole 1 baril BANANES 0.4 tonnes SOJA 0.3 tonnes	pétrole 1 baril BANANES 0.2 tonnes SOJA 0.6 tonnes

Les conditions de vente sont telles que tous les produits achetés dans cette île doivent être immédiatement et en totalité emportés.

Un acheteur se présente avec un pétrolier et un cargo qui contient 2 cales aménagées : la cale avant ne peut contenir que du soja, et la cale arrière ne peut contenir que des bananes.
Les capacités sont les suivantes :

pétrole	1000 barils
cale arrière : BANANES	450 tonnes
cale avant : SOJA	450 tonnes

Le lot à dominante BANANE coûte 5.2 \$. Le lot à dominante SOJA coûte 6.2 \$, Tandis que les prix auxquels ont peut revendre ces produits sur le marché mondial sont les suivants :

1 baril de pétrole	6 \$
1 tonne de BANANES	2 \$
1 tonne de SOJA	8 \$

Questions :

1. Quel problème mathématique doit résoudre l'acheteur pour constituer sa cargaison ?
2. Quelles quantités de bananes, soja et pétrole va-t-il se procurer ?

Le calcul du chiffre d'affaires avec un lot BANANES et de SOJA est :

Produit	quantités	prix unitaire	chiffre d'affaire
pétrole	1 baril	6 \$	6 \$
bananes	0.4 tonnes	2 \$	0.8 \$
soja	0.3 tonnes	8 \$	2.4 \$
		Total	9.2

Produit	quantités	prix unitaire	chiffre d'affaire
pétrole	1 baril	6 \$	6 \$
BANANES	0.2 tonnes	2 \$	0.4 \$
soja	0.6 tonnes	8 \$	4.8 \$
		Total	11.2

- En déduit le Bénéfice par lot :

BANANES	9.2-5.2 = 4 \$
SOJA	11.2-6.2 = 5 \$

Soit x_1 le nombre de lots BANANES, et soit x_2 le nombre de lots SOJA.

Le problème de l'importateur est donc de choisir sa commande , c'est à dire deux nombres x_1 et x_2, de manière à rendre son bénéfice le plus grand possible.

Mathématiquement, le bénéfice s'exprime en fonction de x_1 et x_2 par : on désignera le bénéfice par Z, on a :

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

- l'importateur ne peut se procurer que des nombres positifs de lots :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

- Chaque lot contient 1 baril de pétrole, si on achète x_1 lots BANANE et x_2 lots SOJA, on obtiendra donc $x_1 + x_2$ barils de pétrole. Comme la capacité du pétrolier n'est que de 1000 barils, on voit apparaître une contrainte :
$$x_1 + x_2 \leq 1000$$
- Chaque lot BANANE contient 0.4 tonnes de bananes. Si on achète x_1 lots BANANE, on lui fournira $0.4x_1$ tonnes de bananes. De même, pour x_2 lots SOJA, on a $0.2x_2$ tonnes de bananes. Au total $0.4x_1 + 0.2x_2$ tonnes de bananes. La capacité de la cale qui permet de recevoir des bananes n'est que de 450 tonnes de bananes, on voit apparaître la contrainte :
$$0.4x_1 + 0.2x_2 \leq 450$$
- En procédant de manière analogue pour le soja que pour la banane, on voit apparaître la contrainte :
$$0.3x_1 + 0.6x_2 \leq 450$$

Résumons le programme linéaire de l'importateur : les commandes (x_1, x_2) qu'il peut envisager sont celles du domaine

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 1000 \\ 0.4x_1 + 0.2x_2 & \leq & 450 \\ 0.3x_1 + 0.6x_2 & \leq & 450 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

L'objectif est de maximiser :

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

Exemple 4 :

Un fermier élève des poulets, des canards et des dindons. Il veut avoir 500 volatiles, mais pas plus de 300 canards à la fois. Supposons que l'élevage d'un poulet revienne à 15 francs, celui d'un canard à 10 F celui d'un dindon à 40 F.
Admettons que le fermier puisse vendre ses poulets à 30 F pièce, les canards à 20 F pièce et les dindons à D francs. Il voudrait savoir quelles volailles il faut élever pour réaliser le profit maximum.

1. Quelles contraintes pour ce programme linéaire.
2. Donnez en fonction de D l'expression du profit.
3. Dans chacune des hypothèses suivantes, donnez la politique d'élevage optimale du fermier : a) D = 60 F b) D = 50 F c) D = 55 F

Soit x_1 le nombre de poulet, x_2 le nombre de canard, et x_3 le nombre de dindon.

- Le fermier veut avoir 500 volatiles.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 500$$

- Mais pas plus de 300 canards à la fois.

$$x_2 \leq 300$$

- La fonction objectif : Supposons que l'élevage d'un poulet revienne à 15 francs, celui d'un canard à 10 F celui d'un dindon à 40 F. Admettons que le fermier puisse vendre ses poulets à 30 F pièce, les canards à 20 F pièce et les dindons à D francs. Donc :
  - Pour un poulet le fermier gagne 15 francs.
  - Pour un canard le fermier gagne 10 francs.
  - Pour un dindon le fermier gagne $D - 40$ francs.

  Soit Z le bénéfice totale :

$$Z = 15x_1 + 10x_2 + (D - 40)x_3$$

- la positivité :

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 500$$

donc $x_3 = 500 - x_1 - x_2$, ce qui permet de passer d'un problème à trois variables à un problème à deux variable.
en effet

$$x_1+x_2+x_3 = 500 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 & \leq 500 \\ x_3 & \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 500 \\ 15x_1 + 10x_2 + (D-40)x_3 & = Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 500 \\ (55-D)x_1 + (50-D)x_2 + (D-40)500 & = Z \end{cases}$$

Résumons le programme linéaire du fermier : les couples (x_1, x_2) qu'il faut envisager sont celles du domaine

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 500 \\ 0x_1 + x_2 & \leq & 300 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

L'objectif est de maximiser :

$$Z = (55 - D)x_1 + (50 - D)x_2 + (D - 40)500$$

Exemple 5 :

Dans l'île des Palmiers, les habitants ont formé une coopérative de production où on ne rigole pas : tout le monde travaille. Une partie des adhérents employés de la coopérative sont affectés à la cueillette des orchidées sauvages, seule ressource exportable de l'île, tandis que les autres sont occupés à pécher du poisson, principale source de nourriture de l'île.

Les habitants de l'île vivent dans deux villages, l'un situé au Nord, l'autre au Sud, et pour nourrir les habitants de l'île, chaque semaine, les quantités suivantes de poisson sont nécessaires :

	Thon	Morue	Sardine
Quantités de poisson	900Kg	800Kg	700Kg

Les quantités de poisson rapportées par un pêcheur en une semaine n'ont rien d'aléatoire et sont données par le tableau suivant :

	Thon	Morue	Sardine
Pécheur du Nord	6Kg	20Kg	10Kg
Pécheur du Sud	30Kg	8Kg	10Kg

Tout employé de la coopérative qui ne va pas à la pêche est affecté à la récolte des orchidées sauvages. Évidemment les orchidées ne sont pas les mêmes au Nord de l'île et au Sud : un travailleur du nord en une semaine rapporte une quantité d'orchidées qui vaut 50$, ce chiffre s'élève à 80$ au sud.

Évidemment, le problème de la coopérative est de nourrir la population avec le moins d'employés pour pouvoir récolter un maximum d'orchidées pour générer des revenus à l'exportation.
Nous devrons répondre aux questions suivantes :

Questions :

- Quel problème mathématique doit résoudre la coopérative pour employer « au mieux » la main d'oeuvre ?
- quelles quantités de thon, morue et sardines va-t-on pêcher ?

Supposons que l'on ait le choix entre les deux propositions suivantes qui toutes deux permettent de nourrir la population de l'île :

P1 : 70 travailleurs du Nord et 20 travailleurs du Sud

P2 : 36 travailleurs du Nord et 46 travailleurs du Sud

Selon la proposition1, 90 travailleurs sont occupés à la pêche, tandis que selon les termes de la proposition2 , seulement 82 travailleurs sont distraits de la production d'orchidées. On peut donc penser que la seconde proposition est la meilleure, car elle permet de consacrer à la production d'orchidées le plus grand nombre de personnes.

Ce raisonnement est FAUX, car les travailleurs n'ont pas la même productivité : en effet, la valeur de la récolte d'orchidée d'un travailleur du Nord est de 50$ tandis que celle d'un travailleur du Sud est de 80$.

P1 le manque à gagner est de $50 * 70 + 80 * 20 = 5100\$$.

P2 le manque à gagner est de $50 * 46 + 80 * 36 = 5480\$$

Le raisonnement économique $\Rightarrow$ la proposition 1.

Dans la théorie économique, on ne parle pas de manque à gagner, mais de coût d'opportunité.
Soit alors x_1 le nombre de pêcheurs de la zone Nord, et x_2 le nombre de pêcheurs de la zone Sud.

$$\text{le coût d'opportunité de la coopérative} \Rightarrow C = 50x_1 + 80x_2$$

$$Thon \Rightarrow 6x_1 + 30x_2 \geq 900$$

$$Morue \Rightarrow 20x_1 + 8x_2 \geq 800$$

$$Sardine \Rightarrow 10x_1 + 10x_2 \geq 700$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Exemple 6 :

Le propriétaire d'un hôtel dans une station thermale décide de faire un certain nombre d'aménagements afin de décrocher une étoile de plus. Pour cela toutes les chambres doivent comporter une douche ou une salle de bains, mais la proportion de chambres n'étant équipée que d'une douche ne doit pas dépasser 25%. Une chambre peut être aménagée avec un lit double (2 couchages) ou un lit double et un lit simple (3 couchages). Cependant, vu la taille des chambres actuelles, seulement 50% de celles-ci pourraient contenir 3 couchages. La quasi-totalité des clients seront des curistes et optent donc en général pour une pension complète. Les heures d'ouverture des thermes obligent le restaurant de l'hôtel à n'envisager qu'un service unique fixé à midi trente. La salle de restaurant ne pouvant accueillir que 100 personnes, cela a bien sûr des conséquences sur le nombre de chambres à proposer.
On suppose qu'en période de cure l'hôtel est systématiquement rempli.

Écrire sans le résoudre le programme linéaire qui permettra de déterminer le nombre de chambres de chaque type que devra aménager le propriétaire afin de maximiser son bénéfice. Les tarifs des chambres en Dirhams sont données ci-dessous :

	2 couchages	3 couchages
Douche	250	400
Salle de bains	300	450

On notera respectivement x_1, x_2, x_3, x_4, le nombre de chambres à 2 couchages avec douche, à 2 couchages avec salle de bains, à 3 couchages avec douche, à 3 couchages avec salle de bains.

1. la proportion de chambres n'étant équipée que d'une douche ne doit pas dépasser 25% :
$$x_1 + x_3 \leq \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \Leftrightarrow \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \leq 0$$
2. seulement 50% des chambres pourraient contenir 3 couchages :
$$x_3 + x_4 \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \leq 0$$
3. La salle de restaurant ne pouvant accueillir que 100 personnes, cela a bien sûr des conséquences sur le nombre de chambres à proposer. On suppose qu'en période de cure l'hôtel est systématiquement rempli :
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 100$$
4. $$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$
5. La fonction objectif :
$$Max \quad Z = 250x_1 + 300x_2 + 400x_3 + 450x_4$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 & \leq & 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 & \leq & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = & 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$Max \quad Z = 250x_1 + 300x_2 + 400x_3 + 450x_4$$

Exemple 7 :

Un fabriquant de ballons fait un bénéfice de 8 DH, sur chaque petit ballon et de 15 DH, sur chaque grand ballon.

Pour satisfaire à la demande des vendeurs, la production journalière de petits ballons devrait se situer entre 30 et 80, et la production journalière de grands ballons entre 10 et 30.

Pour maintenir une bonne qualité, le nombre total de ballons produits ne devrait pas dépasser 80 par jour.

Combien de ballon de chaque type faudrait-il fabriquer quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximum ?

Exercice :

Un atelier fabrique trois produits P_1, P_2, et P_3, en quantités x_1, x_2, et x_3. Les marges unitaires des trois produits sont de 3, 4 et 12 dh respectivement.

- Le produit P_1 nécessite 1 heure de travail par jour et le marché ne peut absorber plus de 40 unités de ce produit.
- Le produit P_2 nécessite 2 heures de travail par jour.
- Le produit P_3 nécessite 3 heures de travail par jour et le marché ne peut absorber plus de 80 unités de ce produit.

La capacité de travail dans l'atelier est de 300 heures par jour.

Déterminer le programme linéaire P de ce problème (La fonction objectif, et les contraintes).

Chapitre 2 :

Résolution des programmes linéaires Méthode graphique

Un programme linéaire (PL), selon sa nature, peut être résolu des manières différentes :

1. **Méthode graphique :**
   C'est une représentation géométrique plane dans le cas de deux variables.
2. **Algorithme du Simplexe :**
   Cet algorithme est recommandé lorsque le nombre de variables est quelconque et il est très utilisé dans la pratique.
3. **Recensement des sommets de la région admissible :**
   Cette méthode est possible tant que le nombre des sommets n'est pas assez grand, c'est-à-dire, le nombre des variables et des contraintes reste très limité. On prend le sommet qui optimise la fonction objectif.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode graphique en étudiant les différents cas de PL, suivant la nature de l'objectif (max ou min) et des contraintes (inégalités, égalités ou mixtes).

1. Premier exemple : cas de maximisation

Reprenons l'exemple 1 du chapitre 1 :

	Produit 1 (châssis aluminium) (heures/produit)	Produit 2 (châssis bois) (heures/produit)	Capacité disponible (heures/semaine)
Atelier 1	1	0	4
Atelier 2	0	2	12
Atelier 3	3	2	18
Marge	**3** UM	**5** UM	

La question qui se pose est la suivante : combien faut-il produire de chassis de chaque type par semaine pour maximiser le profit net ?

1.1 Modélisation du problème :

On a déjà montré que ce problème se ramène à résoudre le PL suivant :

$$(P_1)\left\{\begin{array}{l} \max\ z = 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

où x_1 est le nombre de châssis en aluminium et x_2 est le nombre de châssis en bois.

Représentation de la région admissible :

La première étape de la résolution consiste à représenter graphiquement la région admissible. Dans notre cas, c'est l'ensemble des points (x_1, x_2) satisfaisant les inégalités de (P_1).

Graphiquement une inégalité telle que $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ correspond à un demi-plan limité par la droite d'équation : $3x_1 + 2x_2 = 18$.

Lorsque l'on fait l'intersection des cinq demi-plans correspondant aux cinq inégalités :

$$\begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 & (1) \\ & & 2x_2 & \leq & 12 & (2) \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 & (3) \\ x_1 & & & \geq & 0 & (4) \\ & & x_2 & \geq & 0 & (5) \end{cases}$$

on obtient le polyèdre de la figure ci-dessous.

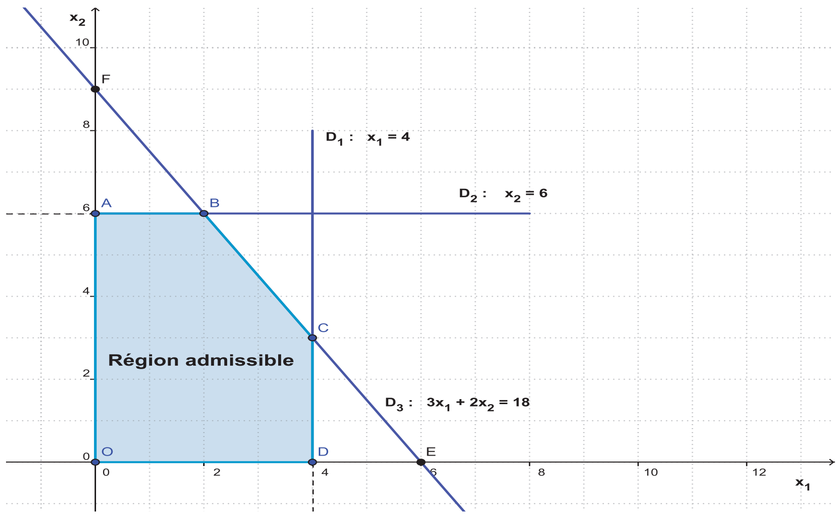
Représentation de l'objectif :

On va considérer des valeurs successives de l'objectif : $z = k$.
Ce qui correspond graphiquement à des droites parallèles Δ_k d'équation :

$$3x_1 + 5x_2 = k$$

Les points d'une de ces droites sont donc le lieu de tous les points donnant la même valeur du profit, d'où le nom de *droites d'isovaleur* (ou *droites d'isoprofit*) de la fonction objectif.

Représentation graphique de la région admissible



On a $3x_1 + 5x_2 = k \Rightarrow x_2 = \frac{-3}{5}x_1 + \frac{k}{5}$.

Donc les droites Δ_k ont la même pente (coefficient directeur) $p = -\frac{3}{5}$

Prenons par exemple les valeurs $k = 0$, $k = 15$ et $k = 30$.

La droite Δ_0 d'isovaleur $k = 0$, c-à-d : $3x_1 + 5x_2 = 0$, passe par les points $(0, 0)$ et $(5, -3)$.

La droite Δ_{15}, c-à-d : $3x_1 + 5x_2 = 15$, passe par les points $(5, 0)$ et $(0, 3)$.

Tandis que La droite Δ_{30}, c-à-d : $3x_1 + 5x_2 = 30$, passe par les points $(10, 0)$ et $(0, 6)$.

On obtient donc des droites parallèles qui montent vers le haut si k augmente.

Ainsi, on conclut que pour maximiser z, il faut prendre la droite d'isovaleur la plus élevée.

Détermination du point optimal :

On cherche le point de la région admissible qui maximise la fonction objectif $z = 3x_1 + 5x_2$.

Ce point sera déterminé graphiquement en tenant compte des deux conditions suivantes :

- Il sera situé sur la droite qui donne le profit le plus grand, donc la droite d'isoprofit la plus élevée.
- Il faut se restreindre à la région admissible.

Conclusion :

Pour maximiser l'objectif, il faut prendre la droite d'isovaleur la plus élevée (qui donne la plus grande valeur à l'objectif) et qui touche encore la région admissible. Le point de contact est un point optimal.

Le point optimal $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ se trouve à l'intersection des deux droites $D_2 \;:\; x_2 = 6$ et $D_3 \;:\; 3x_1 + 2x_2 = 18$.

x^* vérifie donc :

$$\begin{cases} x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases}$$

D'où

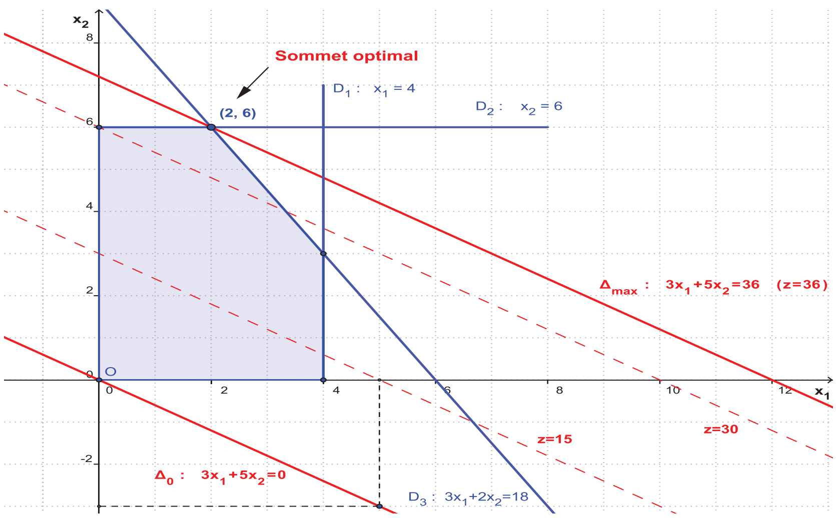
$$x^* = (2 \;,\; 6)$$

et la valeur maximale de la fonction objectif est : $z^* = 3x_1^* + 5x_2^* = 36$

Remarque :

Pour un calcul exact de la solution optimale, il faut commencer tout d'abord par déterminer les droites (contraintes) qui se rencontrent au point optimal, et ensuite résoudre le système d'équations relatives à ces droites.

Représentation graphique de la solution optimale



1.2 Interprétation économique :

La solution optimale est $x^* = (2\ ;\ 6)$, donc il faut produire 2 châssis en aluminium et 6 châssis en bois pour réaliser un profit net maximal égal à 36 UM.

A l'optimum, la deuxième contrainte et la troisième contrainte sont saturées mais la première contrainte ne l'est pas, car :

$$\begin{cases} x_1^* = 2 < 4 \\ 2x_2^* = 2 \times 6 = 12 \\ 3x_1^* + 2x_2^* = (3 \times 2) + (2 \times 6) = 18 \end{cases}$$

Donc, pour réaliser le profit net maximal, il faut utiliser toute la capacité disponible dans l'atelier 2 et l'atelier 3 (plein emploi), et il restera une capacité dans l'atelier 1 (sous- emploi) égale à :

$4 - x_1^* = 2$ (heures par semaine).

2. Deuxième exemple : cas de minimisation

Considérons maintenant un exemple où la fonction objectif doit être minimisée :

Une compagnie possède deux mines de charbon A et B. La mine A produit quotidiennement 1 tonne de charbon de qualité supérieure, 1 tonne de qualité moyenne et 6 tonnes de qualité inférieure. La mine B produit par jour 2, 4 et 3 tonnes de chacune des trois qualités. La compagnie doit produire au moins 90 tonnes de charbon de qualité supérieure, 120 tonnes de qualité moyenne et 180 tonnes de qualité inférieure.

Sachant que le coût de production journalier est le même dans chaque mine, soit 1000 UM, quel est le nombre de jours de production dans la mine A et dans la mine B qui minimisent le coût de production de la compagnie ?

2.1 Modélisation du problème

- variables de décision :

  x_1 : nombre de jours de travail dans la mine A

  x_2 : nombre de jours de travail dans la mine B

- Mise en équations des contraintes :

  La mine A produit par jour 1 tonne de charbon de qualité supérieure, tandis que la mine B en produit 2 tonnes. Comme la compagnie doit satisfaire à la demande de 90 tonnes de charbon de qualité supérieure, la première contrainte s'écrit :

$$x_1 + 2x_2 \geq 90$$

  De même, pour les deux autres qualités de charbon, on obtient :

$$x_1 + 4x_2 \geq 120$$
$$6x_1 + 3x_2 \geq 180$$

  En plus, x_1 et x_2, étant des nombres, vérifient la contrainte de positivité : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

- Fonction objectif :

  Pour minimiser le coût de production de la compagnie, on doit minimiser la fonction objectif : $z = 1000x_1 + 1000x_2$

Le programme linéaire qui modélise ce problème s'écrit donc :

$$\begin{cases} \min \ z = 1000x_1 + 1000x_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 90 \\ x_1 + 4x_2 \geq 120 \\ 6x_1 + 3x_2 \geq 180 \\ x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.2 Résolution graphique

La région admissible est un polyèdre non borné qui a pour sommets les points (voir figure ci-dessous) :

1. $A\,(0\,;\,60)$: intersection de la droite D_3 d'équation $6x_1 + 3x_2 = 180$ avec l'axe x_2 ;
2. $B\,(10\,;\,40)$: intersection des deux droites D_3 et $(D_1 : x_1 + 2x_2 = 90)$;
3. $C\,(60\,;\,15)$: intersection des deux droites D_1 et $(D_2 : x_1 + 4x_2 = 120)$;
4. $D\,(120\,;\,0)$: intersection de la droite D_2 avec l'axe x_1.

La fonction objectif étant $z = 1000x_1 + 1000x_2$, les droites d'isovaleur ont la même pente égale à -1. On remarque sur la figure que celle qui réalise le coût minimal est la droite passant par le sommet B. Ce dernier étant l'intersection des droites D_1 et D_3, ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 90 \\ 6x_1 + 3x_2 = 180 \end{cases}$$

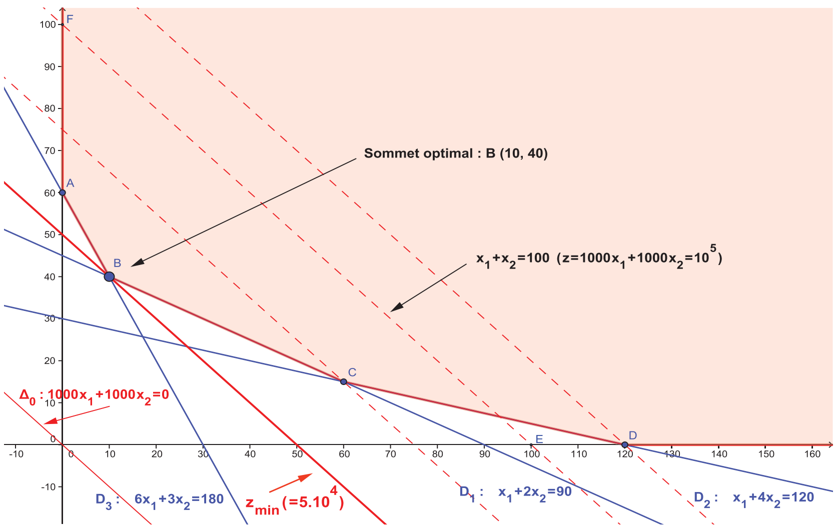
D'où

$$x^* = (10\ ;\ 40)$$

et la valeur minimale de la fonction objectif est :

$$z^* = 1000x_1^* + 1000x_2^* = 50000$$

Graphique exemple 2



2.3 Interprétation économique

On a $x^* = (10\ ;\ 40)$ et $z^* = 50000$, donc il faut 10 jours de travail dans la mine A et 40 jours de travail dans la mine B à la compagnie pour un coût de production minimal de 50000 UM.

A l'optimum, la première contrainte et la troisième contrainte sont saturées mais la deuxième contrainte ne l'est pas :

$$\begin{cases} x_1^* + 2x_2^* = 10 + (2 \times 40) = 90 \\ x_1^* + 4x_2^* = 10 + (4 \times 40) = 170 > 120 \\ 6x_1^* + 3x_2^* = (6 \times 10) + (3 \times 40) = 180 \end{cases}$$

Pour minimiser le coût de production, la compagnie devra utiliser toutes les quantités de charbon de qualités supérieure et inférieure, et il lui restera un stock de charbon de qualité moyenne égal à $170 - 120 = 50$ tonnes.

3. Cas particuliers

3.1 Région admissible bornée - une infinité de solutions optimales :

Dans l'exemple 1, la solution optimale est unique et correspond à un sommet (optimal) de la région admissible (bornée).

En général, il existe des cas où tout un côté (segment) de la région admissible est optimal. En effet, supposons que l'on aie, sous les mêmes contraintes, un objectif de la forme :

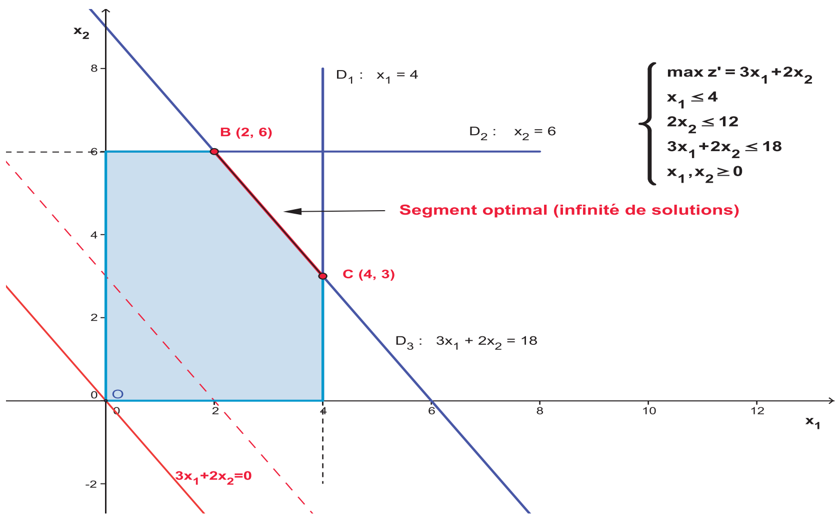
$$\max z' = 3x_1 + 2x_2$$

Il est facile, dans ce cas, de voir que les droites d'isovaleur de l'objectif seraient toutes parallèles à la droite D_3 d'équation :

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

On en déduit (voir figure ci-dessous) que tout le segment joignant le sommet (2, 6) au sommet (4, 3) est optimal. Dans ce cas, on pourra choisir comme solution optimale celle qui correspond au sommet (2, 6) ou (4, 3).

Région admissible bornée - infinité de solutions



3.2 Région admissible non bornée - infinité de solutions :

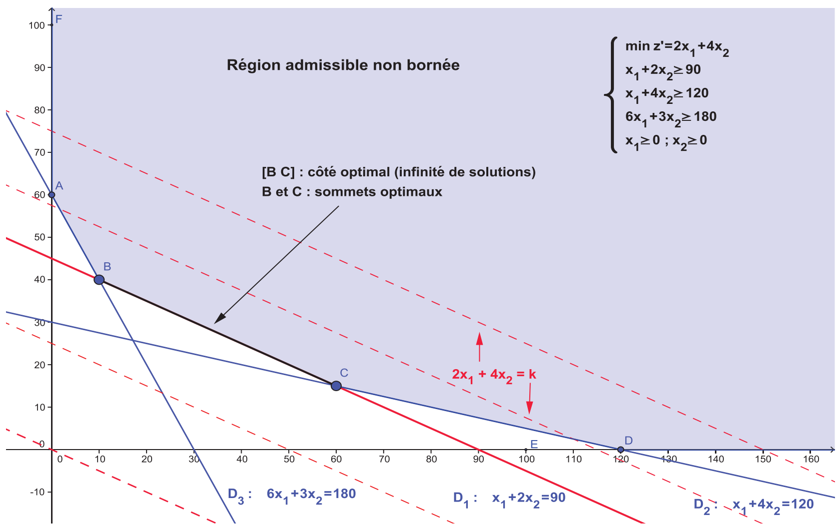
Dans l'exemple 2, la région admissible est un polyèdre non bornée et la solution optimale est unique et atteinte en un sommet du polyèdre.

Supposons maintenant que l'on aie à minimiser la fonction objectif $z' = 2x_1 + 4x_2$ avec les mêmes contraintes.
Nous aurons alors le nouveau PL :

$$\begin{cases} \min \ z' = 2x_1 + 4x_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 90 \\ x_1 + 4x_2 \geq 120 \\ 6x_1 + 3x_2 \geq 180 \\ x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Les droites d'isovaleur seront toutes parallèles à la droite D_1 d'équation $x_1 + 2x_2 = 90$. Par suite, nous aurons une infinité de solutions représentées par le segment joignant les points $B\,(10\,;\,40)$ et $C\,(60\,;\,15)$.

Problème non borné - infinité de solutions



3.3 Région admissible non bornée - solution optimale infinie :

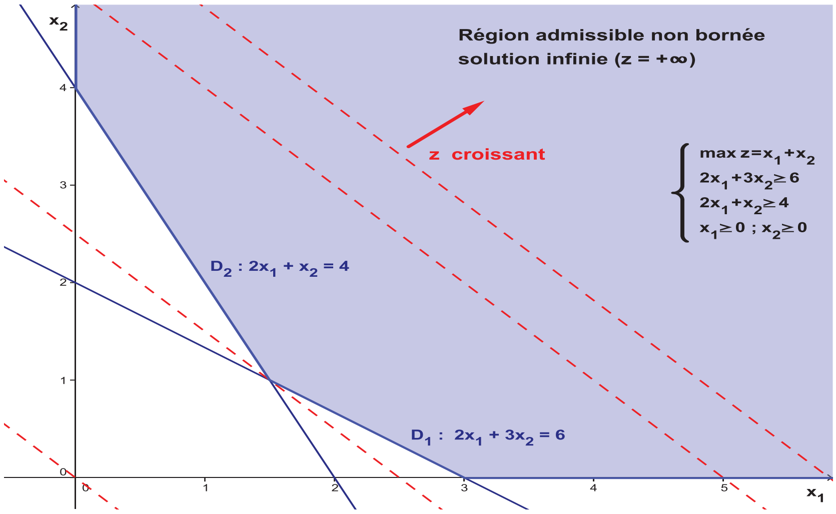
Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max \ z = x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0 \ ; \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En donnant à x_1 et x_2 des valeurs assez grandes les contraintes seront toujours vérifiées. La valeur de la fonction objectif z peut être augmentée indéfiniment. Par conséquent, $z = +\infty$.

Graphiquement, on remarque sur la figure ci-dessous que la région admissible n'est pas bornée et que les droites d'isovaleur peuvent être déplacées à l'infinie en conservant toujours une intersection avec la région admissible : le programme linéaire possède une solution optimale infinie (aucune solution optimale finie) .

Région admissible non bornée - solution infinie



3.4 Région admissible vide - aucune solution :

Considérons maintenant le programme linéaire :

$$\begin{cases} \max\ z = 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

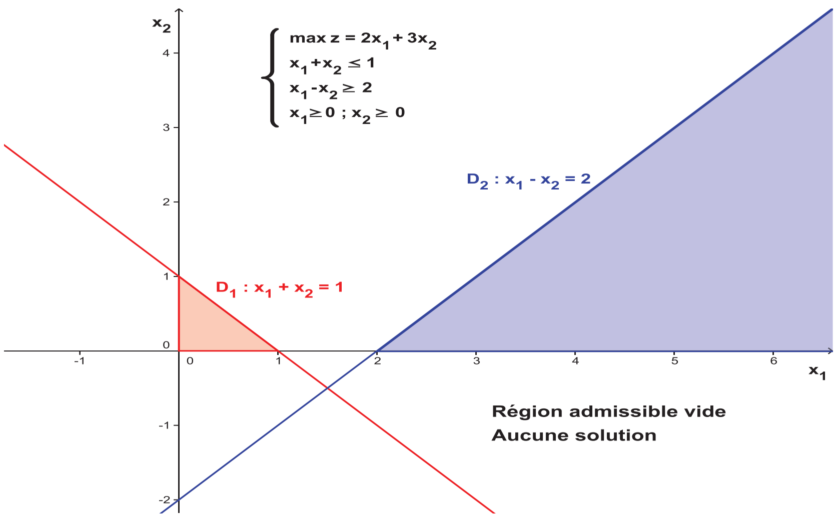
Sur la figure ci-dessous, nous remarquons que la région admissible est vide et par suite le programme linéaire n'admet aucune solution optimale.

Algébriquement, d'après le système des contraintes, on a :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow\ 2x_2 \leq -1$$

ce qui contredit la contrainte $x_2 \geq 0$. Et par conséquent, l'ensemble des solutions réalisables est vide.

Région admissible vide (pas de solution)



En résumé :

L'ensemble réalisable (ou région admissible) d'un programme linéaire est toujours un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ (intersection de demi-espaces) qui peut être :

- vide $\longrightarrow$ pas de solution
- non vide et bornée
  - solution optimale unique $\longrightarrow$ sommet optimal unique du polyèdre
  - infinité de solutions optimales $\longrightarrow$ côté optimal du polyèdre, tous les points de ce côté sont des solutions optimales
- non vide et non bornée
  - solution optimale unique $\longrightarrow$ sommet optimal unique
  - infinité de solutions optimales $\longrightarrow$ côté optimal du polyèdre
  - aucune solution optimale finie ($z = \infty$)

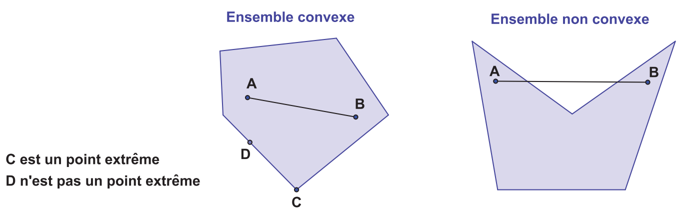
4. Ensembles convexes

Définition

Un ensemble E est convexe si et seulement si pour toute paire de points A et B de cet ensemble, le segment de droite joignant ces deux points est entièrement inclus dans l'ensemble E. Autrement dit :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \alpha \in [0\,,\,1] \quad \alpha x + (1-\alpha) y \in E$$

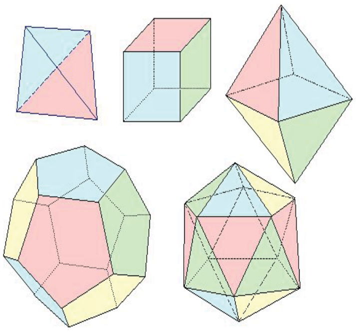
Un point extrême d'un ensemble convexe est un point qui ne peut jamais être entre deux points de cet ensemble.

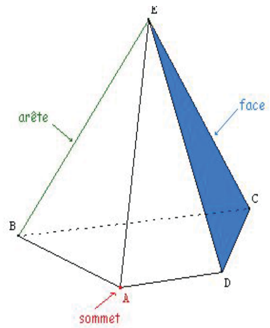


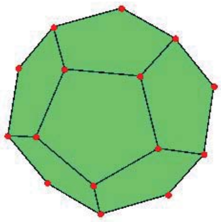
Propriétés

- L'intersection de plusieurs ensembles convexes est un ensemble convexe.
- L'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires est un ensemble convexe. Plus exactement, c'est l'intersection de demi-espaces de $\mathbb{R}^n$ et correspond à un polyèdre convexe (voir figure ci-dessous).
- Lorsque les demi-espaces sont des demi-plans de $\mathbb{R}^2$, l'intersection est un polygone convexe.
- En particulier, l'ensemble réalisable (région admissible) non vide d'un programme linéaire est un ensemble convexe dont les côtés représentent les contraintes linéaires du problème. Il est :
  - soit un ensemble polyédrique convexe non borné,
  - soit un polyèdre convexe borné (polygone dans le cas $\mathbb{R}^2$).
- Si le PL admet des solutions optimales, alors au moins une solution optimale est située sur un sommet (point extrême) du polyèdre.

Exemples de polyèdres







Exercice 1 :

Une usine fabrique deux modèles de bureaux M_1 et M_2. Les marges unitaires, les temps de fabrication de chacun des produits dans chacun des ateliers ainsi que les capacités disponibles de ces ateliers sont donnés au tableau suivant :

	M_1	M_2	Capacité disponible
Atelier 1 (sciage)	1	2	20
Atelier 2 (assemblage)	2	1	22
Atelier 3 (sablage)	1	1	12
Marge	300 UM	200 UM	

La question que se pose la direction de l'usine est la suivante : combien faut-il produire de bureaux de chaque modèle pour maximiser son profit ?

Mêmes questions.

Exercice 2 :

Un groupe d'étudiants organise un petit déjeuner pendant la pause de 10 heures. Pour pouvoir satisfaire la demande, ils doivent disposer au minimum de **90** croissants, de **60** beignets et de **120** pains au chocolat.

Un supermarché propose 2 lots :

- le lot A coûte **10 UM** et il est composé de : **3** croissants, **1** beignet et **1** pain au chocolat,
- le lot B coûte **20 UM** et contient : **1** croissant, **1** beignet et **4** pains au chocolat.

La question qui se pose est la suivante : combien de lots A et de lots B doivent être achetés pour satisfaire la demande avec un coût minimum ?

1. Écrire le programme linéaire (P) modélisant ce problème.
2. Résoudre graphiquement (P).
3. Donner une interprétation économique des résultats trouvés en 2.
4. Combien de lots A et de lots B devraient être achetés s'ils avaient le même prix **10 UM** ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 :

Un restaurateur a constaté que sa clientèle préfère les fruits de mer et qu'il peut offrir indifféremment :

- des assiettes à 8 UM,
  contenant 5 crevettes, 2 crabes et une huître.
- des assiettes à 6 UM,
  contenant 3 crevettes, 3 crabes et 3 huîtres.

Il dispose de 30 crevettes, 24 crabes et 18 huîtres.

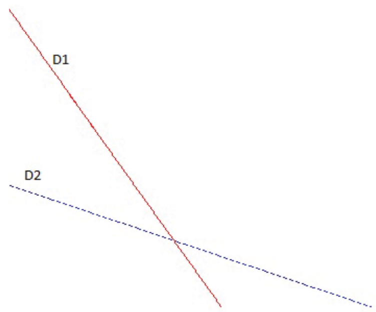
La question que se pose le restaurateur est la suivante : comment doit-il disposer ces assiettes pour réaliser la recette maximale ?

1. Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire.
2. Résoudre graphiquement le programme linéaire.
3. Donner une interprétation économique des résultats obtenus.

Astuce :

Dans ce paragraphe, nous allons voir une astuce pour trouver le sommet optimale, dans le cas de PL avec une solution optimale unique.

Cette technique repose sur la comparaison des pentes, il faut remarquer que entre deux droite $D1$, et $D2$ qui se croise, il est facile de deviner la droite qui correspond à l'équation : $(\Delta_1) : y = -0,3x + 40$, et celle qui correspond $(\Delta_2) : y = -x + 100$.



Exemple 1 :

Reprenons le problème de minimisation de la coopérative de l'île des Palmiers,

le coût d'opportunité de la coopérative s'écrit sous la forme :$C = 50x_1+80x_2$

avec les contraintes suivantes :

$$Thon \Rightarrow 6x_1 + 30x_2 \geq 900$$

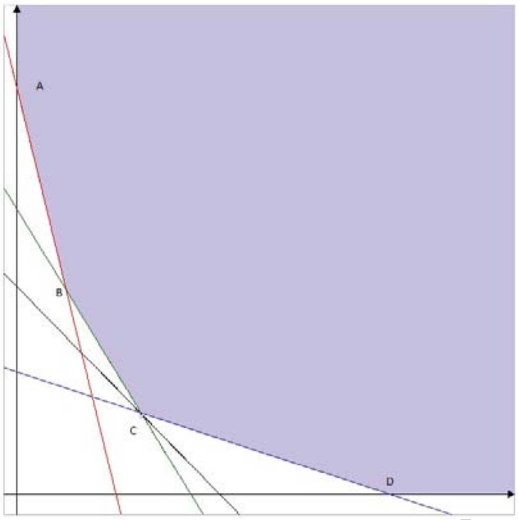
$$Morue \Rightarrow 20x_1 + 8x_2 \geq 800$$

$$Sardine \Rightarrow 10x_1 + 10x_2 \geq 700$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Il faut tracer les droites, et délimiter le domaine admissible.

Il est claire que la solution sera un point parmi les quatre sommets A, B, C, et D. Le problème est de trouver lequel est le bon.



On a les pentes suivantes :

$$\begin{cases} \text{Pente Sardine} = -1 \\ \text{Pente Thon} = -0,5 \\ \text{Pente Morue} = -2,5 \\ \text{Pente Iso-Coût} \; = -0,625 \end{cases}$$

Dans l'ordre croissant, on a :

Pente Morue	<	Pente Sardine	<	pente Iso-Coût	<	Pente Thon
-2,5	<	-1	<	-0,625	<	-0,5

Ce qui nous amène à la conclusion suivante, le sommet optimal est le point C, intersection entre la droite Sardine et la droite Thon.

Exemple 2 :

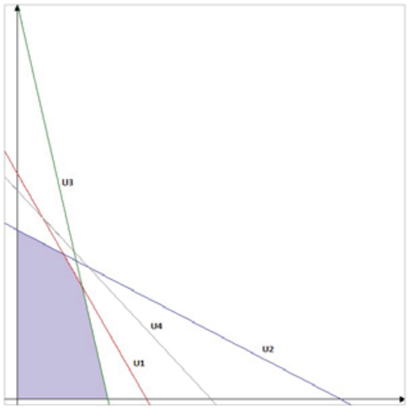
Considérons un exemple de maximisation, la règle est la même :

$$\begin{array}{llll} Max & Z = 17x_1 + 5x_2 & & \text{Pente Iso} = -3,4 \\ (U1) & 1,5x_1 + 10x_2 & \geq 500 & \text{Pente U1} = -1,2 \\ (U2) & 5x_1 + 20x_2 & \geq 2000 & \text{Pente U2} = -4 \\ (U3) & 1,25x_1 + 0,8x_2 & \geq 200 & \text{Pente U3} = -10 \\ (U4) & 4x_1 + 5x_2 & \geq 900 & \text{Pente U4} = -2,47 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

Dans l'ordre on a :

Pente U3	<	Pente U2	<	pente Iso	<	Pente U4	<	Pente U1
-10	<	-4	<	-3,4	<	-2,47	<	-1,2

Cela veut dire que le sommet optimal est le point d'intersection entre la droite U2 et la droite U4. Cependant, d'après la représentation graphique des contraintes, l'intersection entre U2 et U4 n'appartient pas au domaine admissible illustré par le dessin suivant :



Il apparaît clairement sur le dessin, que la contrainte U4 est redondante, donc il ne faut pas la prendre en considération, cela implique que le sommet optimal est l'intersection entre la droite U2 et la droite U1.

Moralité :

Cette méthode ne vaccine pas contre la représentation du domaine admissible, qui permet d'éliminer les contraintes redondantes.

Chapitre 3 :

Résolution des programmes linéaires
La méthode du simplexe

1. Présentation de la méthode du simplexe

- Développée initialement par George Dantzig en 1947.
- Outil principal de résolution des problèmes de programmation linéaire.
- Il existe plusieurs formulations de cette méthode :
  - méthode des tableaux,
  - méthode algébrique (délicate dès que le nombre des variables et des contraintes est important).
- Méthode **exacte** et **itérative** pour résoudre des problèmes linéaires de grande taille :
  - Elle consiste à suivre un certain nombre d'étapes (itérations) avant d'obtenir la solution d'un problème donné,
  - Elle permet de trouver la solution exacte en un nombre fini d'étapes.
- Explore les sommets de la région admissible en améliorant à chaque itération la valeur du critère.
- Basée sur l'algèbre des matrices.

2. Notions générales

2.1 Rappels

Un programme linéaire s'écrit généralement sous la forme :

$$\begin{cases} \max \text{ (ou min) } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ \{\leq, =, \geq\} \ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ \{\leq, =, \geq\} \ b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ \{\leq, =, \geq\} \ b_m \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \max / \min \ z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \{\leq, =, \geq\} \ b_i \qquad i = 1, m \\ x_j \geq 0 \qquad j = 1, n \end{cases}$$

En utilisant la formulation matricielle :

$$\begin{cases} \max / \min \ z = c^Tx \\ Ax \ \{\leq, =, \geq\} \ b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, b_2, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{matrice de type } (m\,,\ n)$$

et $c^Tx = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$.

a_{ij} $(i = 1, m\,;\ j = 1, n)$: coefficients techniques ;
b_i $(i = 1, m)$: seconds membres des contraintes ;
c_j $(j = 1, n)$: coefficients de la fonction économique ;
x_j $(j = 1, n)$: variables de décision (niveaux d'activité).

2.2 Forme canonique d'un PL

- maximisation de la fonction objectif
- toutes les contraintes sont des inégalités du type $\leq$
- toutes les variables sont positives

$$\begin{cases} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad i = 1, m \\ x_j \geq 0 \qquad j = 1, n \end{cases}$$

- Forme matricielle

$$\begin{cases} \max \ z = c^Tx \\ Ax \ \leq \ b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Exemple :

$$(P_1)\quad \begin{cases} \max\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 200 \\ x_1 + x_3 \leq 150 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \max\ z = c^T x \\ Ax \ \leq \ b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ b = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix} \ ; \ c = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \ ; \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

A de type $(4\,,\,3)$,

$m = 4$ (contraintes) et $n = 3$ (variables de décision).

2.3 Forme standard d'un PL

- maximisation de la fonction objectif
- toutes les contraintes sont de type égalités $(=)$
- toutes les variables sont positives

$$\begin{cases} \max z = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, m \\ x_j \geq 0 \qquad j = 1, n \end{cases}$$

- Forme matricielle

$$\begin{cases} \max\ z = c^T x \\ Ax \ = \ b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

2.4 Passage entre les formes

1. $\min f \iff \max -f$
   Par exemple : minimiser $x_1 + 2x_2$ revient à maximiser $-x_1 - 2x_2$
   car : $f(x^*) = \min\{\,f(x)\,,\, x \in X\} \iff f(x^*) \leq f(x)\,,\ \forall x \in X \iff$ $-f(x^*) \geq -f(x),\ \forall x \in X \iff -f(x^*) = \max\{\,-f(x)\,,\, x \in X\}$
2. $ax \geq b \iff -ax \leq -b$
3. $ax = b \iff \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$
4. $ax \leq b \iff \begin{cases} ax + y = b \\ y \geq 0 \end{cases}$ y est dite **variable d'écart**
5. $ax \geq b \iff \begin{cases} ax - y = b \\ y \geq 0 \end{cases}$
6. $x \leq 0 \iff -x \geq 0$
7. x quelconque $\iff \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+ \geq 0\,,\ x^- \geq 0 \end{cases}$ avec $\begin{array}{l} x^+ = \max(x\,,\,0) \\ x^- = \max(-x\,,\,0) \end{array}$

Propriété

Tout programme linéaire peut être mis sous la forme canonique et sous la forme standard.

Remarques

1. Le passage entre la forme générale, la forme canonique et la forme standard se fait moyennant les transformations ci-dessus.
2. La forme canonique est utilisée dans la résolution graphique. Tandis que la forme standard permet une résolution matricielle et sera utilisée pour la méthode de simplexe.

   Notons aussi que la méthode du simplexe requiert des $b_i \geq 0$.

Exemple :

Soit le problème : $(P_2)\begin{cases} \min\ 5x_1 - 3x_2 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

En introduisant les variables d'écart $x_3 \geq 0$ et $x_4 \geq 0$ dans la première et la deuxième contrainte, on met (P_2) sous la forme équivalente :

$$(P_2')\begin{cases} \max\ -5x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

(P_2') est la forme standard de (P_2).

3. Bases, variables de base et solution de base

Soit $Ax = b$ un système d'équations linéaires avec :

A matrice de type (m, n), $m \leq n$ et $rang(A) = m$.

Le système est donc *sous-déterminé* c-à-d le nombre m d'équations est inférieur au nombre n d'inconnues notées $x_1, \ldots, x_n$.

En plus, il existe au moins une sous-matrice de A notée B carrée inversible de type (m, m) (d'ordre m).

Définitions

- On appelle base toute sous-matrice carrée B inversible de type (m, m) extraite de A.
- Les variables associées aux colonnes de B sont dites variables de base, les autres variables hors base.
- Par extension, on appellera également base la liste ordonnée des variables de base ou de leurs indices (notée $\mathcal{B}$).

Exemple :

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire $Ax = b$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A est de type $(2, 4)$ (2 équations et 4 variables).

La sous-matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et $rang(A) = 2$.

Ainsi B est une base.

Les variables de base associés à B sont x_2 et x_4.
Les variables hors base associés à B sont x_1 et x_3.

Remarques

- Une base est inversible et donc les variables de base correspondent à des colonnes linéairement indépendantes de la matrice A.
- Par conséquent, on peut avoir plusieurs bases dans une matrice A.

  En effet, on peut le remarquer dans l'exemple précédent :

  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est aussi une base et correspond alors aux variables de base x_1 et x_2.

  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas une base (car non inversible).
- Avec les conditions précédentes, le système $Ax = b$ admet une infinité de solutions.

Le système de l'exemple précédent :

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

admet une infinité de solutions.

On a : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est une base et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$Ax = b \iff B^{-1}Ax = B^{-1}b$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc le système est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = 1 + 2x_1 - 2x_3 \\ x_4 = -x_1 \end{cases}$$

Le système précédent est équivalent au système de départ $Ax = b$ mais exprimé dans la base B
En fixant des valeurs arbitraires pour x_1 et x_3, on obtient les solutions correspondantes pour x_2 et x_4.

En particulier, pour $x_1 = 0$ et $x_3 = 0$, on obtient la solution $x_2 = 1$ et $x_4 = 0$.

On dit alors que cette solution est la solution de base associée à la base B.

Généralisation :

Soit $Ax = b$ un système d'équations linéaires tel que A matrice de type $(m\,,\,n)$, $m \leq n$ et $rang(A) = m$. Soit B une base de A.

Après permutation des colonnes de A de manière à ce que celles de B soient en premier, on obtient :

$$A \overset{P}{=} \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} \text{ et } x \overset{P}{=} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \text{ où}$$

N est la sous-matrice de A correspondant aux variables hors base,
x_B vecteur de $\mathbb{R}^m$ formé par les variables de base,
x_N vecteur de $\mathbb{R}^{n-m}$ formé par les variables hors base.

et on a :

$$Ax = b \iff Bx_B + Nx_N = b \iff x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Pour déterminer toutes les solutions du système, on choisit donc arbitrairement les valeurs de x_N (paramètres) et on calcule les valeurs correspondantes de x_B.

Définitions

- On appelle solution de base (associée à la base B), la solution particulière obtenue en prenant $x_N = 0$.

  x_B est déterminée de façon unique par :

  $$Bx_B = b \iff x_B = B^{-1}b$$

- Une solution de base est dite réalisable si $x_B \geq 0$ (toutes les variables de base sont positives), autrement dit : $B^{-1}b \geq 0$.

Remarque :

Dans le cas d'un programme linéaire sous forme standard avec les contraintes $Ax = b\,,\, x \geq 0$, une solution de base réalisable correspond géométriquement à un sommet du polyèdre des contraintes.

En particulier, une solution optimale correspond à une solution de base réalisable qui maximise la fonction objectif.

4. Méthode du simplexe en tableaux

4.1 Exemple :

Considérons le problème déjà étudié (Exemple 1, Chapitre 1).
Rappelons le programme linéaire qui modélise ce problème :

$$(P)\begin{cases} \max\ z = 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

où

x_1 est le nombre de chassis du produit 1 (chassis en aluminium),

x_2 est le nombre de chassis du produit 2 (chassis en bois).

La forme standard du programme linéaire (P) s'écrit :

$$(PS)\begin{cases} \max\ z = 3x_1 + 5x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 \\ x_1 + e_1 + 0e_2 + 0e_3 = 4 \\ 2x_2 + 0e_1 + e_2 + 0e_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0e_1 + 0e_2 + e_3 = 18 \\ x_1 \geq 0\,;\ x_2 \geq 0\,;\ e_1 \geq 0\,;\ e_2 \geq 0\,;\ e_3 \geq 0 \end{cases}$$

où e_i est la variable d'écart associée à la ième contrainte.

Le système linéaire des contraintes associé à (PS) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ;\ \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}\ ;\ \tilde{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$z = \tilde{c}^T\tilde{x} = 3x_1 + 5x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$ avec $\tilde{c} = (x_1\,,\, x_2\,,\, 0\,,\, 0\,,\, 0)^T$

Choix de la solution de base réalisable initiale :

Une base initiale est donnée par la matrice : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Elle correspond aux variables de base e_1, e_2, e_3
et variables hors base x_1, x_2.

La solution de base réalisable initiale est :

$(x_1\,,\, x_2\,,\, e_1\,,\, e_2\,,\, e_3) = (0\,,0\,,\,4\,,\,12\,,18)$

Cela signifie qu'au départ on a :

$x_1 = 0\,;\ x_2 = 0\,;\ e_1 = 4\,;\ e_2 = 12\,;\ e_3 = 18$

Autrement dit : on ne produit rien au départ
et $z = 3x_1 + 5x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = 0$.

Tableau initial :

Le premier tableau du simplexe (tableau initial) s'écrit :

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	s.m
e_1	1	0	1	0	0	4
e_2	0	2	0	1	0	12
e_3	3	2	0	0	1	18
$-z$	3	5	0	0	0	0

Variables de base : e_1, e_2, e_3 Variables hors base : x_1, x_2
Solution de base : $(x_1\,,\,x_2\,,\,e_1\,,\,e_2\,,\,e_3) = (0\,,0\,,\,4\,,\,12\,,18)$

La dernière ligne donne les **valeurs marginales** (ou **taux de substitution**) des variables hors base. Elle correspond à la valeur de $-z$ donc la marge bénéficiaire initiale $z = 0$.

La solution n'est pas optimale. On recherche donc une solution de base meilleure : d'où une autre itération.

Itération du simplexe :

On augmente la fonction objectif en faisant entrer une variable dans la base prenant la place d'une variable qui va sortir de la base.

Choix de la variable entrante dans la base :

Une augmentation de 1 unité de x_1 ferait croître la fonction objectif de 3

Une augmentation de 1 unité de x_2 ferait croître la fonction objectif de 5.

On a intérêt à augmenter la valeur de la fonction objectif le plus rapidement possible donc à augmenter la variable ayant le plus grand coefficient strictement positif (cas de maximisation) de la dernière ligne :

x_2 variable entrante dans la base.

Règle générale pour la variable entrante dans la base :

On sélectionne la variable hors base ayant le plus grand coefficient strictement positif dans la dernière ligne (x_2 dans notre cas).

Choix de la variable sortante de la base :

La question qui se pose est : jusqu'à quelle limite doit-on augmenter x_2 ?

Une première idée est de pousser x_2 le plus loin possible tant que les variables de base restent positives.

Supposons qu'on augmente x_2 en maintenant x_1 hors base ($x_1 = 0$), alors :

$$\begin{cases} e_1 = 4 \\ 2x_2 + e_2 = 12 \\ 2x_2 + e_3 = 18 \\ x_2 \geq 0\,;\ e_1 \geq 0\,;\ e_2 \geq 0\,;\ e_3 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e_2 = 12 - 2x_2 \geq 0 \\ e_3 = 18 - 2x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 \leq 12/2 = 6 \\ x_2 \leq 18/2 = 9 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0 \leq x_2 \leq \min\{12/2\,,\,18/2\} = 12/2 = 6$$

Ainsi, la valeur limite que x_2 peut prendre est $x_2 = 6$. La deuxième contrainte sera alors saturée ($e_2 = 0$) : e_2 variable sortante de la base.

Règle générale pour la variable sortante de la base :

On effectue le rapport des seconds membres des contraintes aux coefficients strictement positifs correspondants à la variable entrante, puis on sélectionne la variable de la base ayant le plus petit rapport positif dans la colonne R (e_2 dans notre cas).

Tableau 1

Base	x_1	$\downarrow x_2$	e_1	e_2	e_3	**s.m**	R
e_1	1	**0**	1	0	0	**4**	$4/0=\infty$
$\leftarrow e_2$	0	**2**	0	1	0	**12**	$12/2=6$
e_3	3	**2**	0	0	1	**18**	$18/2=9$
$-z$	3	**5**	0	0	0	0	

x_2 variable entrante dans la base.

e_2 variable sortante de la base.

Le coefficient à l'intersection de la colonne de la variable entrante et la ligne de la variable sortante s'appelle **pivot** (2 dans notre cas).

Pour obtenir le tableau 2, on effectue des pivotages.

Règles de calcul :

- Les coefficients de la ligne du pivot sont divisés par le pivot.
- Les coefficients de la colonne du pivot (sauf le pivot) sont nuls.
- Les autres coefficients sont obtenus par la règle :

$$Nv = Av - \left(\frac{Cpivot}{Pivot} \times Lpivot\right)$$

- Nv : nouvelle valeur
- Av : ancienne valeur
- Cpivot : colonne du pivot
- Lpivot : Ligne du pivot

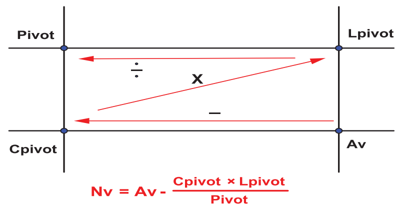


Tableau 1

Base	x_1	$\downarrow x_2$	e_1	e_2	e_3	**s.m**	R
e_1	1	**0**	1	0	0	**4**	$4/0=\infty$
$\leftarrow e_2$	0	**2**	0	1	0	**12**	$12/2=6$
e_3	3	**2**	0	0	1	**18**	$18/2=9$
$-z$	3	**5**	0	0	0	0	

Tableau 2

Base	$\downarrow x_1$	x_2	e_1	e_2	e_3	**s.m**	R
e_1	1	0	1	0	0	**4**	4
x_2	0	1	0	$1/2$	0	**6**	∞
$\leftarrow e_3$	**3**	0	0	-1	1	**6**	2
$-z$	**3**	0	0	$-5/2$	0	-30	

Variable entrante dans la base : x_1 Variable sortante de la base : e_3

Pivot : 3

Tableau 2

Base	$\downarrow x_1$	x_2	e_1	e_2	e_3	s.m	R
e_1	1	0	1	0	0	**4**	4
x_2	0	1	0	$1/2$	0	**6**	∞
$\leftarrow e_3$	**3**	0	0	-1	1	**6**	2
$-z$	3	0	0	$-5/2$	0	-30	

Tableau 3

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	s.m
e_1	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2
x_2	0	1	0	$1/2$	0	6
x_1	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2
$-z$	0	0	0	$-3/2$	-1	-36

Tous les coefficients de la dernière ligne (coefficients de la fonction objectif) sont négatifs ou nuls : on ne peut plus augmenter la fonction objectif. Le tableau 3 est optimal et l'algorithme du simplexe s'arrête.

On a donc : $x_1^* = 2$; $x_2^* = 6$ et $z_{max} = 36$.

Interprétation économique :

L'entreprise doit produire 2 châssis de type 1 (en aluminium) et 6 châssis de type 2 (en bois) pour réaliser un profit maximal de 36 UM.

A l'optimum les variables de base sont $x_1^* = 2$; $x_2^* = 6$ et $e_1^* = 2$ et les variables hors base sont $e_2^* = e_3^* = 0$.

La première contrainte n'est pas saturée : il reste une capacité disponible dans l'atelier 1 (sous-emploi) égale à 2 heures par semaine.
La deuxième et la troisième contrainte sont saturées : il ne reste plus de capacité disponible dans les ateliers 2 et 3 (plein emploi). En effet :

$4 - x_1^* = 4 - 2 = 2$

$12 - 2x_2^* = 12 - 2 \times 6 = 0$

$18 - (3x_1^* + 2x_2^*) = 18 - (3 \times 2 + 2 \times 6) = 0.$

4.2 Cas général :

Considérons un programme linéaire sous forme standard :

$$(PS) \begin{cases} \max \ z = c^T x \\ Ax \ = \ b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où est une A matrice de type $(m\,,\,n)$, $m \leq n$ et $rang(A) = m$.

Supposons connue une base B telle que la solution de base associée est réalisable.

Notons :

$\mathcal{B} = \{i_1, \ldots, i_m\}$: l'ensemble des indices correspondants aux colonnes de B (et donc aux variables de base),

$\mathcal{N} = \{j_1, ..., j_{n-m}\} = \{1, ..., n\} \setminus \mathcal{B}$: l'ensemble des indices hors base,

N : la sous-matrice de A correspondant aux colonnes des indices hors base,

x_B : le vecteur de $\mathbb{R}^m$ formé par les variables de base $(x_i\,,\, i \in \mathcal{B})$,

x_N : le vecteur de $\mathbb{R}^{n-m}$ formé par les variables hors base $(x_i\,,\, i \in \mathcal{N})$.

Rappelons que la solution de base associée à B est réalisable si : $x_B = B^{-1}b \geq 0$.

En effectuant un partitionnement suivant les indices de $\mathcal{B}$ et ceux de $\mathcal{N}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} Ax = b \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \\ & \Longleftrightarrow \quad B\,x_B + N\,x_N = b \\ & \Longleftrightarrow \quad x_B + B^{-1}N\,x_N = B^{-1}b \\ & \Longleftrightarrow \quad x_B = B^{-1}b - B^{-1}N\,x_N \end{aligned}$$

La fonction objectif peut s'écrire :

$$z = c^T x = \sum_{i \in \mathcal{B}} c_i x_i + \sum_{i \in \mathcal{N}} c_i x_i = c_B\,x_B + c_N\,x_N$$

avec $c_B = (c_{i_1}, \ldots, c_{i_m})$ et $c_N = (c_{j_1}, \ldots, c_{j_{n-m}})$

Donc le PL est équivalent à **la forme réduite** associée à la base B :

$$(PR) \begin{cases} \max\ z = c_B\,x_B + c_N\,x_N \\ x_B + B^{-1}N\,x_N = B^{-1}b \\ x_B \geq 0\,,\ x_N \geq 0 \end{cases}$$

On peut maintenant formuler le problème en réécrivant les contraintes et l'objectif en fonction des variables hors base :

$$\begin{aligned} x_B + B^{-1}N\,x_N &= B^{-1}b \Longleftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}N\,x_N \Longrightarrow \\ z &= c_B\,x_B + c_N\,x_N \\ &= c_B(B^{-1}b - B^{-1}N\,x_N) + c_N\,x_N \\ &= (c_N - c_B\,B^{-1}N)x_N + c_B\,B^{-1}b \\ z &= d_N\,x_N + \bar{z} \quad \Longleftrightarrow \quad d_N\,x_N = z - \bar{z} \end{aligned}$$

avec $d_N = c_N - c_B\,B^{-1}N$; $\bar{z} = c_B\,B^{-1}b$

les composantes de d_N s'appellent **coûts réduits** des variables hors base. Ils interviennent de façon déterminante dans la méthode du simplexe.

Ainsi, le problème consiste à maximiser z sachant :

$$\begin{aligned} x_B + B^{-1}N\,x_N &= B^{-1}b \\ d_N\,x_N &= z - \bar{z} \end{aligned}$$

et $x_B \geq 0\,,\ x_N \geq 0$.

La solution de base est donnée par : $x_N = 0$; $x_B = \bar{b} = B^{-1}b$.

Cette solution de base est réalisable signifie que $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$.

La valeur de la fonction objectif z associée à cette solution est $\bar{z}$.

Finalement, le **tableau du simplexe** associé à la base B est (à une permutation de colonnes près) de la forme :

Base	x_B	x_N	s.m
x_B	I_m	$B^{-1}N$	$\bar{b} = B^{-1}b$
$-z$	0	d_N	$-\bar{z}$

$d_N = c_N - c_B\,B^{-1}N$; $\bar{z} = c_B\,B^{-1}b$

Par exemple, le tableau 2 du paragraphe 4.1 donne :

Base	$\downarrow x_1$	x_2	e_1	e_2	e_3	**s.m**
e_1	1	0	1	0	0	**4**
x_2	0	1	0	1/2	0	**6**
$\leftarrow e_3$	3	0	0	-1	1	**6**
$-z$	3	0	0	$-5/2$	0	-30

Base	x_B	x_N	s.m
x_B	I_m	$B^{-1}N$	$\bar{b} = B^{-1}b$
$-z$	0	d_N	$-\bar{z}$

$x_B = (e_1, x_2, e_3)$: variables de base,

$x_N = (x_1, e_2)$: variables hors base,

$d_N = (3\,,\,-5/2)$; $\bar{b} = (4\,,\,6\,,\,6)$,

Solution de base : $(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = (0\,,\,6\,,\,4\,,\,0\,,\,6)$,

Fonction objectif : $\bar{z} = 30$.

Remarques :

- La forme tableau présente l'avantage de préserver la structure du programme linéaire. En plus, elle met en évidence les opérations matricielles (résolution des systèmes linéaires par exemple) mis en œuvre durant la résolution.
- Les variables de base se distinguent par le fait qu'elles forment une matrice identité dans le système des contraintes et n'interviennent pas dans la fonction objectif. les variables hors base sont les variables restantes et leur coefficients dans la fonction objectif sont représentés par les coûts réduits (vecteur d_N).
- Rappelons que, une fois le choix du pivot établi, le passage d'un tableau simplexe au tableau suivant s'effectue manuellement en utilisant les règles de calculs :
  - Les coefficients de la ligne du pivot sont divisés par le pivot.
  - Les coefficients de la colonne du pivot (sauf le pivot) sont nuls.
  - Les autres coefficients sont obtenus par la règle du rectangle.

Définition

1. Une solution de base x_B associée à la base B est dite **non dégénérée** si :
$$x_B = B^{-1}b > 0$$
c-à-d le second membre du système réduit $\bar{b} > 0$

   autrement dit, si toutes les variables de base sont strictement positives.

   Dans le cas contraire, on dit que la solution de base est dégénérée.
2. Un programme linéaire est **non dégénéré** si toute solution de base réalisable est non dégénérée.

Théorème (Critère d'optimalité)

Si
$$\boxed{d_N = c_N - c_B\, B^{-1}N \leq 0}$$
alors la solution de base réalisable $x_N = 0$; $x_B = \bar{b} = B^{-1}b$ est optimale.

Preuve du Théorème :

Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ une solution de base réalisable quelconque et soit $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ la solution de base associée à B.

Comme $x_N \geq 0$ (car x réalisable) et $d_N \leq 0$ (par hypothèse) on a :

$$d_N\, x_N = \sum_{i \in \mathcal{N}} d_i x_i \leq 0$$

D'où :

$$z(x_1, ..., x_n) = d_N\, x_N + \bar{z} \leq \bar{z} = z(x_1^*, ..., x_n^*).$$

Étapes du simplexe (cas général) :

Si le critère d'optimalité ($d_N \leq 0$) n'est pas vérifié on va procéder soit à une itération, soit on va découvrir que $\max z = +\infty$.

Supposons alors qu'il existe au moins une composante d_j de d_N telle que $d_j > 0$, $j \in \mathcal{N}$.

Choix de la variable entrante :

Considérons l'indice $j \in \mathcal{N}$ tel que

$$\boxed{d_j = \max\{d_k \;;\; k \in \mathcal{N}\}}$$

et la colonne d'indice j de la matrice $\bar{A}_N = B^{-1}N = (\bar{a}_{kj}\,, (1 \leq k \leq m)$.

On a les possibilités suivantes :

1. $\boxed{\bar{a}_{kj} \leq 0, \; \forall\, k = 1, ..., m}$

   (Tous les termes de la colonne j de "la variable entrante" sont ≤ 0).

   Dans ce cas $\boxed{\text{l'ensemble réalisable est non borné et } \max z = +\infty}$

2. $\boxed{\text{Il existe } k \in \{1, ..., m\} \text{ tel que } \bar{a}_{kj} > 0}$

   Dans ce cas on va procéder à une itération et

   $\boxed{x_j \text{ est la variable entrante dans la base.}}$

Choix de la variable sortante :

On va supposer maintenant que le programme linéaire est non dégénéré.

Soit p l'indice vérifiant :

$$\boxed{\frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pj}} = \min\{\frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pj}} \;;\; \bar{a}_{pj} > 0\}}$$

(On fait le rapport des coefficients du s.m du tableau simplexe avec les coefficients de la colonne j de la variable entrante et on choisit le plus petit)

Dans ce cas, $\boxed{x_p \text{ est la variable sortante de la base.}}$

Théorème (Convergence de l'algorithme du simplexe)

Supposons que le programme linéaire est non dégénéré et qu'il admette au moins une solution optimale (avec z_{max} fini). Alors après un nombre fini d'itérations, l'algorithme du simplexe va trouver une solution de base optimale.

4.3 Problèmes particuliers :

Dans le paragraphe précédent, nous avons fait les deux hypothèses suivantes :

1. La connaissance d'une solution de base réalisable initiale.
2. Le programme linéaire est non dégénéré.

En général, ces hypothèses ne sont pas toujours vérifiées.

Détermination d'une base réalisable initiale :

Pour déterminer une base initiale réalisable, considérons tout d'abord le cas où le PL est donné sous la forme canonique :

$$(PC)\ \begin{cases} \max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ \leq\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ \leq\ b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ \leq\ b_m \\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

En introduisant des variables d'écart $(e_1, \dots, e_m)$, nous obtenons le PL sous forme standard :

$$(PS)\ \begin{cases} \max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0e_1 + \dots + 0e_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + e_1 \ =\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + e_2 \ =\ b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + e_m \ =\ b_m \\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, e_1 \geq 0, \dots, e_m \geq 0 \end{cases}$$

En posant

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix}\ ;\ \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, e_1, \dots, e_m)^T\ ;\ \tilde{c} = (c_1, \dots, c_n, 0, \dots, 0)^T$$

où I_m est la matrice identité d'ordre m.

(PS) s'écrit alors sous la forme matricielle :

$$\begin{cases} \max\ \tilde{z} = \tilde{c}^T\tilde{x} \\ \tilde{A}\tilde{x} \ =\ b \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases}$$

Comme I_m est inversible on a une solution de base initiale :

$$B = I_m\ ;\ N = A\ ;\ x_B = B^{-1}b = b\ ;\ x_N = x = 0$$

Si $b \geq 0$ alors cette solution est en plus réalisable.

Le problème se pose dans le cas contraire c-à-d celui où il existe au moins un indice j tel que $b_j < 0$.

Dans ce cas, $x_B = b$, $x_N = x = 0$ est une solution de base mais non réalisable et il faut procéder à une première étape qui consiste à déterminer une solution de base réalisable de départ : c'est **la phase I** de la méthode du simplexe.

Problème de dégénérescence :

Dans le cas où le PL est dégénéré, on peut avoir :

$$\frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pj}} = \min\{\frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pj}}\ ;\ \bar{a}_{pj} > 0\} = 0$$

Alors la fonction objectif z ne varie pas après le changement de base et par conséquent on peut rencontrer les situations suivantes :

- Lors de la détermination de la variable entrante, nous sommes en présence d'au moins deux variables hors base ayant le même et le plus élevé coefficient strictement positif dans la dernière ligne.
- Lors de la détermination de la variable sortante, nous sommes en présence d'au moins deux variables de base ayant le même et le plus petit rapport positif dans la dernière colonne.
- il est possible, après un certain nombre d'itérations, de retrouver le tableau de départ (problème de **cyclage**).

Plusieurs remèdes au cyclage dans les cas dégénérés sont utilisés, le plus connu c'est **la règle de Bland** :

Lorsque plusieurs variables sont susceptibles d'entrer ou de sortir de la base, on choisit toujours la variable x_r ayant le plus petit indice r.

Exemples :

T1

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s.m	R
x_5	4	7	0	0	1	4	4	4/7
x_4	2	8	0	1	0	3	0	0
x_3	- 2	9	1	0	0	2	0	0
$-z$	-5	2	0	0	0	5	-3	

Variables candidates à enter dans la base : x_2
Variables candidates à sortir de la base : x_4 et x_3. On choisit donc x_3.

T2

Base	x_1	$\downarrow x_2$	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m	R
$\leftarrow e_1$	1	2	5	1	0	0	4	2
e_2	3	4	3	0	1	0	8	2
e_3	2	4	1	0	0	1	12	3
$-z$	2	3	1	0	0	1	0	

T3

Base	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
e_1	1	2	5	1	0	0	3
e_2	3	1	3	0	1	0	10
e_3	2	8	1	0	0	1	8
$-z$	3	3	2	0	0	0	0

T4

Base	x_1	$\downarrow x_2$	e_1	e_2	s.m
e_1	0	-2	1	-1	20
x_1	1	0	0	2,5	3
$-z$	0	16	0	-3	-32

Tous les coefficients de la colonne de la variable entrante x_2 sont négatifs ou nuls : $z_{max} = +\infty$

Un autre cas particulier : infinité de solutions optimales

Si à la fin des itérations, une variable est hors base avec un coefficient nul dans la dernière ligne du tableau optimal, alors on a une arête (face,...) optimale. Les autres sommets optimaux peuvent être obtenus en faisant rentrer cette variable dans la base. Considérons, par exemple, le tableau optimal suivant :

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	s.m
x_1	1	0	1	1	3
x_2	0	1	-1	-2	2
$-z$	0	0	-1	0	-8

On fait entrer e_2 dans la base et x_1 sera alors la variable sortante. Ainsi, on obtient une autre solution optimale :

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	s.m
e_2	1	0	1	1	3
x_2	2	1	1	0	8
$-z$	0	0	1	0	-8

4.4 Simplexe avec minimisation de l'objectif :

Dans le cas de minimisation de l'objectif, les itérations et l'optimalité de la méthode du simplexe sont déterminés par les critères suivants :

- **Critère de la variable entrante :** On choisit la variable hors base ayant le coût réduit le plus négatif.
- **Critère de la variable sortante :** le même que dans le cas de maximisation, puisque ce critère est lié à la réalisabilité des variables.
- **Critère d'optimalité :** L'algorithme du simplexe s'arrête quand tous les coûts réduits des variables hors base (coefficients de la dernière ligne du tableau simplexe) sont tous positifs ou nuls.

Les critères précédents découlent de la propriété suivante :

minimiser $z = c_1x_1 + ... + c_nx_n$ revient à maximiser $-z$.

Exemple :

Soit le problème :

$$(PM)\begin{cases} \min\ -x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En rajoutant les variables d'écart on obtient la forme standard :

$$(PMS)\begin{cases} \min\ -x_1 - 2x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + e_1 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + e_2 = 4 \\ x_1 + x_2 + e_3 = 5 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

On remarque que tous les termes du second membre (2, 4 et 5) sont positifs. Dans notre cas, l'obtention d'une solution de base réalisable initiale est triviale. Elle correspond aux variables de base e_1, e_2, e_3 et variables hors base x_1, x_2.

Les contraintes de (PMS) peuvent être représentées par le système :

$$\begin{cases} \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \; ; \; \tilde{b} = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$z = \tilde{c}^T \tilde{x} = -x_1 - 2x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$ avec $\tilde{c} = (x_1 \, , \, x_2 \, , \, 0 \, , \, 0 \, , \, 0)^T$

Une base initiale est donnée par la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La solution de base réalisable initiale est :

$(x_1 \, , \, x_2 \, , \, e_1 \, , \, e_2 \, , \, e_3) = (0 \, , 0 \, , \, 2 \, , \, 4 \, , 5)$

Tableau 1

Base	x_1	↓ x_2	e_1	e_2	e_3	**s.m**	R
← e_1	-3	**2**	1	0	0	**2**	1
e_2	-1	2	0	1	0	**4**	2
e_3	1	1	0	0	1	**5**	5
$-z$	-1	**-2**	0	0	0	0	

x_2 variable entrante dans la base.

e_1 variable sortante de la base.

Tableau 2

Base	↓ x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	**s.m**	R
x_2	-3/2	1	1/2	0	0	**1**	$-2/3$
← e_2	**2**	0	-1	1	0	**2**	1
e_3	5/2	0	-1/2	0	1	**4**	8/5
$-z$	**-4**	0	1	0	0	2	

Tableau 3

Base	x_1	x_2	↓ e_1	e_2	e_3	**s.m**	R
x_2	0	1	-1/4	3/4	0	**5/2**	10
x_1	1	0	-1/2	1/2	0	**1**	-2
← e_3	0	0	**3/4**	-5/4	1	**3/2**	2
$-z$	0	0	**-1**	2	0	6	

Tableau 4

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	**s.m**
x_2	0	1	0	1/3	1/3	**3**
x_1	1	0	0	-1/3	2/3	**2**
e_1	0	0	1	-5/3	4/3	**2**
$-z$	0	0	0	1/3	4/3	**8**

Tous les coefficients de la dernière ligne sont positifs ou nuls : le tableau 4 est optimal et $\mathbf{x_1^* = 2}$; $\mathbf{x_2^* = 3}$; $\mathbf{e_1^* = 2}$; $\mathbf{e_2^* = e_3^* = 0}$; $\mathbf{z^* = -8}$

5. Initialisation de la méthode du simplexe

Jusqu'ici nous avons vu comment trouver une solution de base réalisable initiale lorsque le programme linéaire de départ est sous forme canonique :

$$\begin{cases} \max\ z = c^T x \\ Ax \ \leq \ b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

alors en ajoutant une variable d'écart e_i à chaque contrainte pour la transformer en une égalité, la matrice $\tilde{A}$ qui correspond à l'ensemble des contraintes $\tilde{A}x = b$ prend la forme : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix}$

avec $\tilde{x} = (x_1, ..., x_n, e_1, ..., e_m)^T$ et I_m est la matrice identité d'ordre m.

Le passage en forme standard permet d'avoir une base initiale $B_0 = \{e_i,\ i = 1...m\}$ facilement.

Si le second membre est positif alors cette base est réalisable et correspond à l'origine : $x_N = (x_1, ..., x_n) = 0$ et $x_B = (e_1, ..., e_m)$.

Mais dans le cas général on peut avoir les situations suivantes :

- L'une des m contraintes possède un second membre b_i négatif, alors il y a violation de la contrainte de positivité pour la variable d'écart concernée ($e_i = b_i < 0$).
- Le problème contient déjà des contraintes d'égalité alors ces dernières n'ont pas besoin de l'adjonction de variables d'écart et il n'existe pas de sous-matrice identité dans la matrice $\tilde{A}$.

Il est alors nécessaire de mettre en place une procédure pour obtenir une matrice identité comme matrice de base initiale et qui correspond à une solution de base initiale réalisable. En général, une telle procédure est basée sur l'adjonction de variables artificielles.

Méthode du grand M :

Considérons le PL suivant :

$$(P_1) \begin{cases} \max\ z = x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On remarque que les termes du second membre sont tous positifs, mais la 1ère contrainte est de type $\geq$ et la 2ème contrainte est de type $=$

On rajoute une variable d'écart e_1 à la 1ère contrainte (pour avoir l'égalité).

On rajoute en plus deux variables artificielles a_1 et a_2 aux 2 contraintes.

En plus, on transforme la fonction objectif en pondérant les variables artificielles avec un coefficient $-M$ où M est un nombre supposé positif et assez grand.

On obtient alors le PL :

$$\begin{cases} \max\ z = x_1 + x_2 - Ma_1 - Ma_2 \\ 2x_1 + x_2 - e_1 + a_1 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + a_2 = 6 \\ x_1, x_2, e_1, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

qui est sous forme standard.

On remarque que les contraintes du dernier problème peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} ; \tilde{b} = b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

La solution de base initiale est donnée par :

Variables de base : $a_1 = 4$; $a_2 = 6$

Variables hors base : $x_1 = x_2 = e_1 = 0$

Pour établir le premier tableau du simplexe, il faut maintenant exprimer les variables de base en fonction des variables hors base.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - e_1 + a_1 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + a_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - 2x_1 - x_2 + e_1 \\ a_2 = 6 - x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

La fonction objectif devient alors :

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 - Ma_1 - Ma_2 \\ &= x_1 + x_2 - M(4 - 2x_1 - x_2 + e_1) - M(6 - x_1 - 2x_2) \\ z &= (3M+1)x_1 + (3M+1)x_2 - Me_1 - 10M \end{aligned}$$

Notons aussi que : si $x_1 = x_2 = e_1 = 0$ alors $z = \bar{z} = -10M$.

Nous pouvons maintenant démarrer le simplexe avec le tableau suivant :

Tableau 1

Base	$\downarrow x_1$	x_2	e_1	a_1	a_2	**s.m**	R
$\leftarrow a_1$	**2**	1	-1	1	0	**4**	2
a_2	1	2	0	0	1	**6**	6
$-z$	3M+1	3M+1	-M	0	0	10 M	

x_1 et x_2 candidates à entrer dans la base. En appliquant la règle de Bland, x_1 entrante. a_1 sort de la base.

Tableau 2

Base	x_1	$\downarrow x_2$	e_1	a_1	a_2	**s.m**	R
x_1	1	1/2	-1/2	1/2	0	**2**	4
$\leftarrow a_2$	0	**3/2**	1/2	-1/2	1	**4**	8/3
$-z$	0	(3M+1)/2	(M+1)/2	-(3M+1)/2	0	-2 + 4M	

Tableau 3

Base	x_1	x_2	$\downarrow e_1$	a_1	a_2	**s.m**	R
x_1	1	0	-2/3	2/3	-1/3	**2/3**	-1
$\leftarrow x_2$	0	1	**1/3**	-1/3	2/3	**8/3**	8
$-z$	0	0	1/3	-M-1/3	-M-1/3	-10/3	

Tableau 4

Base	x_1	x_2	e_1	a_1	a_2	**s.m**
x_1	1	2	0	0	1	**6**
e_1	0	3	1	-1	2	**8**
$-z$	0	-1	0	-M	-M-1	-6

Le tableau 4 est optimal et $x_1^* = 6$; $x_2^* = 0$; $e_1^* = 8$; $z_{\max} = 6$.

On remarque que chaque variable artificielle (a_1 et a_2) a été mise hors base de telle sorte que leurs valeurs sont nulles dans le tableau optimal.

En général, la méthode du grand M (" big M" ,"méthode M") consiste à :

- Introduire des variables artificielles a_i , $(i = 1, ..., p)$ dans les contraintes qui posent un problème pour la réalisabilité de la base initiale.
- Remplacer la fonction objectif par $z = \max c^T x - M \sum_{i=1}^{m} a_i$

  où M est une constante positive assez grande.
- En pratique, on n'est pas obligé de donner une valeur à M.
- Chaque fois que M est comparé à un nombre, il sera toujours considéré comme plus grand.
- Si la méthode du simplexe se termine avec une solution (x^*, a^*) telle que $a* = (a_1^*, ..., a_p^*) = 0$, alors x^* est une solution optimale du problème de départ.
- Si la méthode du simplexe se termine avec une solution (x^*, a^*) telle que $a^* \neq 0$ (c-à-d qu'au moins une variable artificielle est encore dans la base dans le tableau optimal), alors le problème est non réalisable.

Chapitre 4 :

Résolution des programmes linéaires
La dualité

1. Exemple introductif

Une entreprise E1 fabrique les produits P1 et P2. Elle utilise les matières premières M1, M2 et M3, à raison de :

2 tonnes de M1, **1** tonne de M2 et **3** tonnes de M3
par unité produite de P1,

1 tonne de M1, **3** tonnes de M2 et **4** tonnes de M3
par unité produite de P2.

Elle dispose de :
50 tonnes de M1, **25** tonnes de M2 et **60** tonnes de M3.

Le bénéfice net est de **5000** UM par unité de P1 et de **2000** UM par unité de P2.

Le problème que se pose l'entreprise est le suivant :

Quelle quantité de chacun des deux produits P1 et P2 l'entreprise doit-elle fabriquer pour que le bénéfice soit maximal ?

	Produit P1	Produit P2	Disponibilité
Quantité de m.p M1 (tonnes)	**2**	**1**	**50**
Quantité de m.p M2 (tonnes)	**1**	**3**	**25**
Quantité de m.p M3 (tonnes)	**3**	**4**	**60**
Prix unitaire (UM)	**5000**	**2000**	

Le problème de l'entreprise E1 se modélise par le programme linéaire :

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} \max\ z = 5000x_1 + 2000x_2 & \\ 2x_1 + x_2 \leq 50 & \text{Quantité de m.p M1} \\ x_1 + 3x_2 \leq 25 & \text{Quantité de m.p M2} \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 60 & \text{Quantité de m.p M3} \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 & \end{array}\right.$$

x_1 : quantité de produits P1 fabriqués

x_2 : quantité de produits P2 fabriqués

Supposons qu'une autre entreprise E2, en rupture de stock, désire racheter les matières premières (M1, M2 et M3) de l'entreprise E1. Le problème qu'elle va se poser et le suivant :

Quel doit être le prix unitaire minimum d'achat y_1, y_2 et y_3 de chaque matière première, pour que :

- la valeur totale des m.p consommées par chaque produit P1 et P2 soit supérieure ou égale à leurs prix unitaires respectifs, $c_1 = 5000$ UM et $c_2 = 2000$ UM (pour que cela reste intéressant pour l'entreprise E1),
- le prix total d'achat des matières premières disponibles soit minimum ?

Ce deuxième problème peut se mettre sous la forme :

$$(D)\left\{\begin{array}{ll} \min\ w = 50y_1 + 25y_2 + 60y_3 & \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 5000 & \text{contrainte produit P1} \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 2000 & \text{contrainte produit P2} \\ y_1\ ;\ y_2\ ;\ y_3 \geq 0 & \end{array}\right.$$

y_i : prix unitaire d'achat de la m.p Mi $\quad (i = 1, 2, 3)$

Le problème (D) est appelé problème **dual** de (P).
Le problème (P) est appelé problème **primal**.

Remarque

Comparons les deux problèmes, primal (P) et dual (D) :

$$(P)\begin{cases} \max z & = & 5000x_1 & + & 2000x_2 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 50 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 25 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 60 \\ x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \min w & = & 50y_1 & + & 25y_2 & + & 60y_3 \\ 2y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & \geq & 5000 \\ y_1 & + & 3y_2 & + & 4y_3 & \geq & 2000 \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq 0 \end{cases}$$

Les coefficients de la fonction objectif w de (D) correspondent aux coefficients du second membre de (P).
De même, Les coefficients de la fonction objectif z de (P) correspondent aux coefficients du second membre de (D).
Si nous désignons par :
A, b et c respectivement la matrice des contraintes, le second membre et le vecteur des coûts du problème (P),
A', b' et c' respectivement la matrice des contraintes, le second membre et le vecteur des coûts du problème (D),
alors on a :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; b = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 60 \end{pmatrix} \; ; \; c = \begin{pmatrix} 5000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A^T \; ; \; b' = \begin{pmatrix} 5000 \\ 2000 \end{pmatrix} = c \; ; \; c' = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 60 \end{pmatrix} = b$$

Le problème primal (P) et son dual (D) sont liés par les relations suivantes :

- Le problème (P) contient 2 variables (x_1 et x_2) et 3 contraintes.
- Le problème (D) contient 3 variables (y_1, y_2 et y_3) et 2 contraintes.
- On en conclut que le nombre de variables de (P) est égal au nombre de contraintes de (D) et réciproquement, le nombre de variables de (D) est égal au nombre de contraintes de (P).
- On peut vérifier facilement que le dual de (D) est le problème (P).
- Le problème (P) est un problème de maximisation. Tandis que (D) est un problème de minimisation.
- Le minimum $w_{\min}$ atteint par le problème (D) est égal au maximum $z_{\max}$ du problème (P).
  Cela signifie dans notre cas que le prix d'achat minimal des matières premières par l'entreprise E2 est égal au profit maximal que peut en tirer l'entreprise E1 en vendant ces matières premières.

2. Formulation générale du problème dual

- **Formulation algébrique :**

Soit un programme linéaire sous forme canonique :

$$(P)\begin{cases} \max\ z = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \ldots + c_n\,x_n \\ a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n \ \leq\ b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n \ \leq\ b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n \ \leq\ b_m \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

n variables x_1, x_2,..., x_n et m contraintes.
Coefficients du second membre : b_1, b_2,..., b_m.
Coefficients (coûts) de la fonction objectif : c_1, c_2,..., c_n
Matrice des contraintes A de type $(m,\ n)$ (m lignes et n colonnes).

Le problème dual de (P) est défini par :

$$(D)\begin{cases} \min\ w = b_1\,y_1 + b_2\,y_2 + \ldots + b_m\,y_m \\ a_{11}\,y_1 + a_{21}\,y_2 + \ldots + a_{m1}\,y_m \ \geq\ c_1 \\ a_{12}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + \ldots + a_{m2}\,y_m \ \geq\ c_2 \\ \vdots \\ a_{1n}\,y_1 + a_{m2}\,y_2 + \ldots + a_{mn}\,y_m \ \geq\ c_n \\ y_1 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0 \end{cases}$$

m variables y_1, y_2,..., y_m et n contraintes.
Coefficients du second membre : c_1, c_2,..., c_n.
Coefficients (coûts) de la fonction objectif : b_1, b_2,..., b_m
Matrice des contraintes : $A' = A^T$ de type $(n,\ m)$ (n lignes et m colonnes).

- **Formulation matricielle :**

$$(P)\begin{cases} \max\ z = c^T x \\ Ax\ \leq\ b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \min\ w = b^T y \\ A^T y\ \geq\ c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Exemples :

$$(P_1)\begin{cases} \max z &=& x_1 &+& 3x_2 \\ x_1 &+& x_2 &\leq& 14 \\ -2x_1 &+& 3x_2 &\leq& 12 \\ 2x_1 &-& x_2 &\leq& 12 \\ x_1 &,& x_2 &\geq 0 \end{cases}$$

$$(D_1)\begin{cases} \min w &=& 14y_1 &+& 12y_2 &+& 12y_3 \\ y_1 &-& 2y_2 &+& 2y_3 &\geq& 1 \\ y_1 &+& 3y_2 &-& y_3 &\geq& 3 \\ y_1 &,& y_2 &,& y_3 &\geq 0 \end{cases}$$

$$(P_2)\begin{cases} \min z &= -2x_1 + 9x_2 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 10 \\ 4x_1 - 3x_2 &\leq 8 \\ x_1 - x_2 &\leq 6 \\ x_1 , x_2 &\geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \min z &= -2x_1 + 9x_2 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 10 \\ -4x_1 + 3x_2 &\geq -8 \\ -x_1 + x_2 &\geq -6 \\ x_1 , x_2 &\geq 0 \end{cases}$$

Le dual de (P_2) est :

$$(D_2)\begin{cases} \max w &= 10y_1 - 8y_2 - 6y_3 \\ 3y_1 - 4y_2 - y_3 &\leq -2 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 &\leq 9 \\ y_1 , y_2 , y_3 &\geq 0 \end{cases}$$

Question : Dual de (D_2) ?

$$(\bar{D}_2)\begin{cases} \min z &= -2u_1 + 9u_2 \\ 3u_1 + u_2 &\geq 10 \\ -4u_1 + 3u_2 &\geq -8 \\ -u_1 + u_2 &\geq -6 \\ u_1 , u_2 &\geq 0 \end{cases}$$

Le dual du dual de $(P_2) = (P_2)$.

3. Correspondances entre le primal et le dual

Problème Primal	Problème Dual
maximisation	minimisation
second membre des contraintes	coefficient de la fonction objectif
coefficient de la fonction objectif	second membre des contraintes
m contraintes	m variables de décision
n variables de décision	n contraintes
$i^{\text{ème}}$ contrainte de type $\leq$	$i^{\text{ème}}$ variable ≥ 0
$j^{\text{ème}}$ variable ≥ 0	$j^{\text{ème}}$ contrainte de type $\geq$

4. Théorème de dualité

Avec les notations du paragraphe 2, on a les résultats suivants :

Théorème 1 (Dualité forte)

Le problème primal (P) admet une solution optimale x^* si et seulement si le problème dual (D) admet une solution optimale y^*, et dans ce cas, on a :

$c^T x^* = b^T y^*$ autrement dit $z^* = w^*$.

Théorème 2 (conditions de complémentarité)

Soient x une solution réalisable du problème primal (P) et y une solution réalisable du problème dual (D). Alors x et y sont optimales ssi :

$$y_i\Big(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\Big) = 0 , \quad i = 1, ..., m \qquad (1)$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} y_i\, a_{ij} - c_j\Big)x_j = 0 , \quad j = 1, ..., n \qquad (2)$$

Par exemple :

$$(P)\begin{cases} \max\ z = 5000x_1 + 2000x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_1 + 3x_2 \leq 25 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \min\ w = 50y_1 + 25y_2 + 60y_3 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 5000 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 2000 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Si $x = (x_1, x_2)$ réalisable pour P et $y = (y_1, y_2, y_3)$ réalisable pour D, alors x et y solutions optimales ssi :

$$y_1(50 - 2x_1 - x_2) = 0\ ;\ y_2(25 - x_1 - 3x_2) = 0\ ;\ y_3(60 - 3x_1 - 4x_2) = 0$$

$$(2y_1 + y_2 + 3y_3 - 5000)\,x_1 = 0 \quad ; \quad (y_1 + 3y_2 + 4y_3 - 2000)\,x_2 = 0$$

Une interprétation économique du théorème 1 a été donnée dans le paragraphe 2 sur l'exemple introductif.

Les problèmes primal et dual peuvent s'écrire :

$$(P)\begin{cases} \max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ \leq\ b_i \quad (i = 1, ..., m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, ..., n) \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \min\ w = \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i \ \geq\ c_j \quad (j = 1, n) \\ y_i \geq 0 \quad (i = 1, m) \end{cases}$$

Soient x^* une solution optimale de (P) et y^* une solution optimale de (D).

D'après le théorème 2, on a :

$$y_i^*\Big(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^*\Big) = 0\ , \quad i = 1, ..., m \qquad (3)$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} y_i^*\, a_{ij} - c_j\Big)x_j^* = 0\ , \quad j = 1, ..., n \qquad (4)$$

Conséquences :

- Si la $i^{\text{ème}}$ contrainte du problème primal (P) est non saturée alors

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^* \neq 0$$

  et la relation (3) entraîne que $y_i^* = 0$.
- Si la $j^{\text{ème}}$ contrainte du problème dual (D) est non saturée alors

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^*\, a_{ij} - c_j \neq 0$$

  et la relation (4) entraîne que $x_j^* = 0$.
- Si $y_i^* > 0$ alors (3) $\Rightarrow$ la $i^{\text{ème}}$ contrainte de (P) est saturée.
- Si $x_j^* > 0$ alors (4) $\Rightarrow$ la $j^{\text{ème}}$ contrainte de (D) est saturée.

5. Interprétation économique des variables duales

Considérons le problème de production suivant :

Une entreprise fabrique 2 produits P1 et P2. Soient x_1 et x_2 leurs quantités respectives.

Leurs marges respectives sont de 4 UM et 3 UM.

Pour produire une unité du produit P1 on utilise 2 unités de matière première et 5 heures de travail, tandis que pour une unité de P2 on a besoin de 1 unité de matière première et de 6 heures de travail.

Le stock est de 3 unités et le nombre d'heures de travail par jour est de 11h.

Ce problème peut être modéliser par le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} \max\ z = 4x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 & \text{Quantité de m.p} \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 11 & \text{Nombre d'heures de travail/jour} \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le chef d'entreprise voudrait savoir ce que lui rapporterait le fait que son atelier soit ouvert une heure de plus par jour. Autrement dit, il voudrait connaître l'augmentation de sa marge bénéficiaire si le deuxième coefficient du second membre passait de 11 à 12. On obtient alors un deuxième P.L :

$$(P')\begin{cases} \max\ z = 4x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 & \text{(Quantité de m.p)} \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 12 & \text{(Nombre d'heures de travail/jour)} \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale de (P) est : $A = (1,\ 1)$ et $z_{\max} = 7$ UM.

La solution optimale de (P') est : $A' = (6/7,\ 9/7)$ et $z'_{\max} = 51/7$ UM.

L'augmentation de l'objectif est de : $\Delta z = 51/7 - 7 = 2/7$.

D'autre part, le dual de (P) s'écrit :

$$(D)\begin{cases} \min\ w = 3y_1 + 11y_2 \\ 2y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ y_1 + 6y_2 \geq 3 \\ y_1 \geq 0\ ;\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le problème dual (D) a pour solution optimale : $(y_1^*,\ y_2^*) = (9/7,\ 2/7)$.

Donc y_2^* représente l'augmentation de l'objectif si on augmente le nombre d'heures de travail/jour de 1 unité. Si on avait augmenté la capacité de stockage d'une unité (c-à-d de 3 à 4) sans augmenter le nombre d'heures, on aurait pu constater une augmentation de l'objectif égale à 9/7.

En général on a le résultat suivant :

Si on augmente la $i^{\text{ème}}$ composante du second membre du problème primal (b_i) d'une unité, alors la fonction objectif augmentera d'une quantité égale à la $i^{\text{ème}}$ variable duale optimale (y_i^*).

Remarques

- Les valeurs des variables duales y_i sont appelées **coûts marginaux** ou **valeurs marginales**.
- Si une contrainte d'indice i est non saturée, alors les relations de complémentarité entraînent que $y_i^* = 0$, c-à-d le coût marginal d'indice i est nul. Donc on n'a pas intérêt à augmenter la capacité si on n'a pas utilisé toutes les ressources.
- Si le coût marginal d'indice i est non nul c-à-d $y_i^* \neq 0$, alors la contrainte d'indice i est saturée ; cela signifie que toutes les ressources ont été utilisées, donc une augmentation de la capacité permettra d'augmenter le bénéfice.

Passage du tableau optimal primal au tableau optimal dual et vice versa

Primal		Dual
La valeur optimale de la fonction objectif z	=	La valeur optimale de la fonction objectif w
Coûts marginaux des variables hors base	Signe opposé	Colonne s.m des variables de base associées (Valeurs optimales des variables de base associées)
Colonne second membre	Signe opposé	Coûts marginaux
La variable de décision x_j en base ($x_j > 0$)		La variable d'écart t_j hors base ($t_j = 0$) (Contrainte d'indice j saturée)
La variable de décision x_j hors base ($x_j = 0$)		La variable d'écart t_j en base ($t_j > 0$) (Contrainte d'indice j non saturée)
La variable d'écart e_i en base ($e_i > 0$) (Contrainte d'indice i non saturée)		La variable de décision y_i hors base ($y_i = 0$)
La variable d'écart e_i hors base ($e_i = 0$) (Contrainte d'indice i saturée)		La variable de décision y_i en base ($y_i > 0$)
Ligne x_j en base	Signe opposé	Colonne t_j hors base
Ligne e_i en base	Signe opposé	Colonne y_i hors base
Colonne x_j hors base	Signe opposé	Ligne t_j en base
Colonne e_i hors base	Signe opposé	Ligne y_i en base

Exercice d'application :

Une entreprise fabrique les produits P1 et P2. Elle utilise les matières premières M1, M2 et M3. Les quantités (en tonnes) de chaque matière première par unité de produit fabriqué, les capacités disponibles (tonnes) ainsi que les marges unitaires sont rapportées dans le tableau ci-dessous :

	Produit P1	Produit P2	Disponibilité
Quantité de m.p M1	1	3	96
Quantité de m.p M2	1	1	40
Quantité de m.p M3	7	4	238
Prix unitaire (UM)	15	25	

1. Formuler un P.L (P) aidant l'entreprise à maximiser son chiffre d'affaires et résoudre (P) par l'algorithme du simplexe.
2. Donner le P.L dual (D) et ses valeurs optimales $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, w^*)$.
3. Si la fabrique pouvait augmenter la quantité de matière première M1 ou M2, dans laquelle serait-il conseillé d'investir en premier ?
4. Établir le tableau optimal dual.

Exercice d'application - corrigé :

1)

Variables de décision :

x_1 : quantité de produits P1 fabriqués

x_2 : quantité de produits P2 fabriqués

Programme linéaire :

$$(P)\begin{cases} \max\ z = 15x_1 + 25x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 96 & \text{Contrainte quantité de m.p M1} \\ x_1 + x_2 \leq 40 & \text{Contrainte quantité de m.p M2} \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 238 & \text{Contrainte quantité de m.p M3} \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard du problème primal :

$$(P.S)\begin{cases} \max\ z = 15x_1 + 25x_2 \\ x_1 + 3x_2 + e_1 = 96 \\ x_1 + x_2 + e_2 = 40 \\ 7x_1 + 4x_2 + e_3 = 238 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau 1

Base	x_1	$\downarrow x_2$	e_1	e_2	e_3	**s.m**	R
$\leftarrow e_1$	1	**3**	1	0	0	**96**	$96/3 = 32$
e_2	1	1	0	1	0	**40**	$40/1 = 40$
e_3	7	4	0	0	1	**238**	$238/4 = 59,5$
$-z$	15	**25**	0	0	0	0	

Variable entrante : x_2.

Variable sortante : e_1.

Pivot : 3

Tableau 2

Base	$\downarrow x_1$	x_2	e_1	e_2	e_3	**s.m**	R
x_2	$1/3$	1	$1/3$	0	0	**32**	96
$\leftarrow e_2$	**$2/3$**	0	$-1/3$	1	0	**8**	12
e_3	$17/3$	0	$-4/3$	0	1	**110**	$238/4 = 19,4$
$-z$	$20/3$	0	$-25/3$	0	0	-800	

Variable entrante : x_1 ; Variable sortante : e_2 ; Pivot : $2/3$

Tableau 3

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	s.m
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	28
x_1	1	0	$-1/2$	$3/2$	0	12
e_3	0	0	$3/2$	$-17/2$	1	42
$-z$	0	0	-5	-10	0	-880

Le tableau 3 est optimal car tous les coefficients de la dernière ligne $-z$ sont négatifs ou nuls.

$x_1^* = 12$; $x_2^* = 28$; $e_1^* = e_2^* = 0$; $e_3^* = 42$; $z^* = 880$.

L'entreprise doit fabriquer 12 produits P_1 et 28 produits P_2 pour réaliser un profit maximal de 880 UM.

2)

$$(D) \begin{cases} \min \ w = 96y_1 + 40y_2 + 238y_3 \\ y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 15 & \text{contrainte produit P1} \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 25 & \text{contrainte produit P2} \\ y_1 \ ; \ y_2 \ ; \ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

y_i : prix unitaire d'achat de la m.p Mi $\quad (i = 1, 2, 3)$

D'après la ligne $-z$ du tableau 3, les coûts marginaux de e_1, e_2 et e_3 sont respectivement : -5, -10 et 0. Donc

$y_1^* = 5$; $y_2^* = 10$; $y_3^* = 0$ et $w^* = z^* = 880$

(Voir “passage du tableau optimal primal au tableau optimal dual”).

3)

On a $y_1^* = 5$ et $y_2^* = 10$, donc une augmentation de la quantité de la m.p M_1 (resp. M_2) d'une tonne va entraîner une amélioration du chiffre d'affaires de 5 UM (resp. 10 UM). Ainsi l'entreprise a intérêt à investir dans la quantité de la m.p M_2 en premier.

4) Il faut appliquer les règles de passage du tableau optimal primal au tableau optimal dual.

La dernière ligne du tableau 3 donne :

$w^* = 880$; $y_1^* = 5$; $y_2^* = 10$; $y_3^* = 0$; $t_1^* = 0$; $t_2^* = 0$

(t_1 et t_2 sont les variables d'écart associées au problème dual) ;

Le s.m du tableau optimal dual est donné par la dernière ligne du tableau optimal primal avec un signe opposé.

De même, la dernière ligne du tableau optimal dual est déduite du s.m du tableau optimal primal avec un signe opposé.

On peut faire les correspondances suivantes :

$\mathbf{x_i \longleftrightarrow t_i} \qquad \mathbf{y_i \longleftrightarrow e_i}$

Si une variable est dans la base son correspondant est hors base :

e_1 et e_2 sont hors base dans le primal donc leurs correspondants y_1 et y_2 sont dans la base pour le dual.

case (variable1, variable2) = - (case correspondant1, correspondant 2).

Exemples :

case (y_1,y_3) = - case (e_1,e_3)= -3/2   case (y_1,t_1) = - case (e_1,x_1) = 1/2

Tableau optimal primal

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	s.m
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	28
x_1	1	0	$-1/2$	$3/2$	0	12
e_3	0	0	$3/2$	$-17/2$	1	42
$-z$	0	0	-5	-10	0	-880

Tableau optimal dual

Base	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	s.m
y_1	1	0	-3/2	1/2	-1/2	5
y_2	0	1	17/2	-3/2	1/2	10
$-w$	0	0	-42	-12	-28	-880

Chapitre 5 :

Résolution des programmes linéaires Analyse de sensibilité

Dans la pratique, on n'est jamais sûr des nombres qui définissent les contraintes. Par exemple, le prix de gasoil serait-il à $7,81$DH dans un mois, faut-il vraiment 3H30 pour faire un Casablanca-Tanger malgré les travaux au niveau de la rocade de Rabat ? etc.

Loin de nous l'idée de traiter les nombres qui définissent les contraintes comme le résultat d'aléas : il n'est pas question ici de présenter une théorie de la programmation linéaire à coefficients aléatoires.

Néanmoins, on peut essayer d'envisager la variation de quelques nombres qui définissent les contraintes ou l'expression de la fonction à maximiser (fonction objectif) et essayer de relier ces variations à la variation de la solution optimale : avec 30 centimes de plus au prix du gasoil, dans quelles proportions vais-je baisser mon bénéfice ! sous entendu : combien suis-je prêt à payer ces 30 centimes supplémentaires ? En donnant 15mn de pause supplémentaire tous les deux heures de route aux transporteurs, de combien va varier ma marge ?

Notons que nous avons déjà abordé de tels types de problèmes dans le second chapitre consacré à la méthode graphique. Nous avons vu dans quelle mesure le bénéfice pouvait augmenter lorsqu'on faisait varier une contrainte en remplissant de soja la cabine du capitaine du bateau.

Les techniques qui permettent d'analyser ces phénomènes forment ce que l'on appelle l'analyse de sensibilité, sensibilité aux contraintes, sensibilité aux paramètres qui définissent la fonction objectif. Nous verrons qu'elles nous permettront de résoudre un autre type de problèmes de programmation linéaire.

Pour illustrer notre propos, nous partirons d'un exemple simple.

Exemple :

Un fleuriste dispose d'un stock de roses, d'un stock d'œillets et d'un stock d'orchidées. Il peut confectionner avec ces fleurs trois types de bouquets qui ont un grand succès auprès de la clientèle : il sait qu'il pourra vendre dans la journée toute quantité de bouquets qu'il aura préparée. Le tableau suivant donne tous les renseignements utiles :

	Type de bouquet			stock
Type de fleur	bouquet N1	bouquet N2	bouquet N3	disponible
roses	2	3	2	90
œillets	1	2	1	81
orchidées	4	3	1	120
Prix	8UM	5UM	6UM	

Le problème du fleuriste est de savoir comment choisir les nombres de bouquets de chaque type de manière à maximiser sa recette totale. Pour résoudre ce problème, nous savons qu'il faut commencer par « le mettre en équations ».

On notera alors :

- x_1 le nombre de bouquets N 1
- x_2 le nombre de bouquets N 2
- x_3 le nombre de bouquets N 3
- Z la recette totale

Le problème du fleuriste s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{llll} & & \max\ z = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 & \\ (e_1) & \text{roses} & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq 90 \\ (e_2) & \text{œillets} & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 81 \\ (e_3) & \text{orchidées} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq 120 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}\right.$$

Dans cette écriture, nous avons mis entre parenthèses les noms des variables d'écart que nous allons utiliser dans « la forme standard ».

Ce problème s'écrit, sous sa forme standard :

$$\begin{cases} & \max\ z = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 & \\ (e_1)\text{roses} & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + e_1 & = 90 \\ (e_2)\text{œillets} & x_1 + 2x_2 + x_3 + e_2 & = 81 \\ (e_3)\text{orchidées} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 + e_3 & = 120 \\ & x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0 & \end{cases}$$

Ce qui nous conduit au premier tableau de la méthode simplexe :

Tableau 1

Base	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m	R
e_1	2	3	2	1	0	0	90	45
e_2	1	2	1	0	1	0	81	81
$\leftarrow e_3$	**4**	3	1	0	0	1	120	30
$-Z$	8	5	6	0	0	0	0	

Tableau 2

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m	R
e_1	0	3/2	**3/2**	1	0	$-1/2$	30	20
e_2	0	5/4	3/4	0	1	$-1/4$	51	68
x_1	1	3/4	1/4	0	0	1/4	30	120
$-Z$	0	-1	4	0	0	-2	-240	

Tableau 3

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	2/3	0	$-1/3$	20
e_2	0	1/2	0	$-1/2$	1	0	36
x_1	1	1/2	0	$-1/6$	0	1/3	25
$-Z$	0	-5	0	$-8/3$	0	$-2/3$	-320

Ce dernier tableau donne la solution du problème du fleuriste :

$$Z = 320; \quad x_1 = 25; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 20; \quad e_1 = 0; \quad e_2 = 36; \quad e_3 = 0.$$

Ce qui signifie que le fleuriste devra composer :

- 25 bouquets N1 ($x_1 = 25$)
- 0 bouquets N2 ($x_2 = 0$)
- 20 bouquets N3 ($x_3 = 20$)
- Il utilisera toutes ses roses ($e_1 = 0$)
- Il lui restera 36 œillets . ($e_2 = 36$)
- Il utilisera toutes ses orchidées ($e_3 = 0$)
- Sa recette sera de 320 ($Z = 320$)

1. Variation des bornes des contraintes

Supposons maintenant qu'un incident vous ait fait perdre la dernière colonne du tableau : vous vous trouvez maintenant devant le tableau :

Tableau 3

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	2/3	0	−1/3	A
e_2	0	1/2	0	−1/2	1	0	B
x_1	1	1/2	0	−1/6	0	1/3	C
$-Z$	0	−5	0	−8/3	0	−2/3	D

Vous devez recalculer les nombres A,B,C,D.

Pour répondre à ce problème, il faut se souvenir que le dernier tableau a été obtenu à partir du premier en appliquant la méthode du pivot. Ces deux tableaux représentent donc deux systèmes d'équations équivalents, c-à-d que toute solution de l'un des systèmes est solution de l'autre.

Écrivons ces systèmes :

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} Z-8x_1-5x_2-6x_3 & = & 0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3+e_1 & = & 90 \\ x_1+2x_2+x_3+e_2 & = & 81 \\ 4x_1+3x_2+x_3+e_3 & = & 120 \\ x_1\geq 0\ ;\ x_2\geq 0\ ;\ x_3\geq 0 & & \end{array}\right.$$

$\Longleftrightarrow$

$$(P')\left\{\begin{array}{lcl} Z+5x_2+8/3e_1+2/3e_3 & = & D \\ x_2+x_3+2/3e_1-1/3e_3 & = & A \\ 1/2x_2-1/2e_1+e_2 & = & B \\ x_1-1/2x_2-1/6e_1+1/3e_3 & = & C \\ x_1\geq 0\ ;\ x_2\geq 0\ ;\ x_3\geq 0 & & \end{array}\right.$$

Toute solution de l'un est aussi solution de l'autre. Nous connaissons une solution particulière du premier système "la solution de base" :

$$x_1=0;\quad x_2=0;\quad x_3=0;\quad e_1=90;\quad e_2=81;\quad e_3=120.$$

Cette solution doit aussi être solution de second système : en remplaçant, on trouve :

$$(P')\left\{\begin{array}{lcl} 0+5\times 0+8/3\times 90+2/3\times 120 & = & D \\ 0+0+2/3\times 90-1/3\times 120 & = & A \\ 1/2\times 0-1/2\times 90+81 & = & B \\ 0-1/2\times 0-1/6\times 90+1/3\times 120 & = & C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} D & = & 320 \\ A & = & 20 \\ B & = & 36 \\ C & = & 25 \end{array}\right.$$

Ainsi, on peut retrouver une partie des valeurs numériques du tableau final en prenant en compte le fait que les tableaux initiaux et finaux représentent des systèmes d'équations équivalents.

Cette technique permet de retrouver une partie de ses calculs si une tache inopportune est venue brouiller les résultats.

Supposons maintenant que le tableau initial soit légèrement modifié : ce ne sont plus

$$\begin{cases} 90 & \textit{roses} \\ 81 & \text{œillets} \\ 120 & \text{orchidées} \end{cases} \qquad \text{Mais} \qquad \begin{cases} 84 & \textit{roses} \\ 72 & \text{œillets} \\ 120 & \text{orchidées} \end{cases}$$

Le problème du fleuriste est modifié et devient :

$$\begin{cases} & \max\ z = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 & \\ (e_1)\text{roses} & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + e_1 & = 84 \\ (e_2)\text{œillets} & x_1 + 2x_2 + x_3 + e_2 & = 72 \qquad \text{avec} \\ (e_3)\text{orchidées} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 + e_3 & = 120 \\ & x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0 & \end{cases}$$

Tableau 1

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
e_1	2	3	2	1	0	0	84
e_2	1	2	1	0	1	0	72
e_3	4	3	1	0	0	1	120
$-Z$	8	5	6	0	0	0	0

Supposons que l'on applique à ce tableau exactement les mêmes calculs que lors du traitement précédent : on va retrouver « à peu près » le même tableau final que précédemment : seule la dernière colonne sera différente : le dernier tableau de calculs sera donc de la forme :

Tableau 3

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	2/3	0	$-1/3$	A
e_2	0	1/2	0	$-1/2$	1	0	B
x_1	1	1/2	0	$-1/6$	0	1/3	C
$-Z$	0	-5	0	$-8/3$	0	$-2/3$	D

où il ne nous reste plus qu'à calculer les nombres A,B,C,D. On procédera exactement de la même façon, en disant qu'une solution particulière du système représenté par ce tableau est :

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad e_1 = 84; \quad e_2 = 72; \quad e_3 = 120.$$

ce qui nous conduit à la solution :

$$(P') \begin{cases} 0 + 5 \times 0 + 8/3 \times 84 + 2/3 \times 120 & = D \\ 0 + 0 + 2/3 \times 84 - 1/3 \times 120 & = A \\ 1/2 \times 0 - 1/2 \times 84 + 72 & = B \\ 0 - 1/2 \times 0 - 1/6 \times 84 + 1/3 \times 120 & = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D & = 304 \\ A & = 16 \\ B & = 30 \\ C & = 26 \end{cases}$$

Ce qui signifie que le fleuriste devra composer :

- 26 bouquets N1 ($x_1 = 26$)
- 0 bouquets N2 ($x_2 = 0$)
- 16 bouquets N3 ($x_3 = 16$)
- Il utilisera toutes ses roses ($e_1 = 0$)
- Il lui restera 30 œillets . ($e_2 = 30$)
- Il utilisera toutes ses orchidées ($e_3 = 0$)
- Sa recette sera de 304 ($Z = 304$)

Supposons maintenant que l'on parte d'un stock

$$\begin{cases} 162 & \textit{roses} \\ 30 & \text{œillets} \\ 207 & \text{orchidées} \end{cases} \quad \text{plutôt que} \quad \begin{cases} 90 & \textit{roses} \\ 81 & \text{œillets} \\ 120 & \text{orchidées} \end{cases}$$

Le problème du fleuriste devient :

$$\begin{cases} & \max\ z = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 & \\ (e_1)\text{roses} & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + e_1 & = 162 \\ (e_2)\text{œillets} & x_1 + 2x_2 + x_3 + e_2 & = 30 \quad\quad \text{avec} \\ (e_3)\text{orchidées} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 + e_3 & = 207 \\ & x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0 & \end{cases}$$

Tableau 1

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
e_1	2	3	2	1	0	0	162
e_2	1	2	1	0	1	0	30
e_3	4	3	1	0	0	1	207
$-Z$	8	5	6	0	0	0	0

En appliquant les mêmes raisonnements que précédemment, on obtiendra

$$(P') \begin{cases} 0 + 5 \times 0 + 8/3 \times 162 + 2/3 \times 207 & = D \\ 0 + 0 + 2/3 \times 162 - 1/3 \times 207 & = A \\ 1/2 \times 0 - 1/2 \times 162 + 30 & = B \\ 0 - 1/2 \times 0 - 1/6 \times 162 + 1/3 \times 207 & = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 570 \\ A = 39 \\ B = -51 \\ C = 42 \end{cases}$$

Tableau 3

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	$2/3$	0	$-1/3$	39
e_2	0	$1/2$	0	$-1/2$	1	0	-51
x_1	1	$1/2$	0	$-1/6$	0	$1/3$	42
$-Z$	0	-5	0	$-8/3$	0	$-2/3$	570

On trouve alors ce qu'il fallait éviter à tout prix : des valeurs négatives dans la dernière colonne du tableau du simplexe. La solution correspondante n'est pas à considérer car elle n'est pas réalisable.

Moralité

On peut, avec la technique précédente, mesurer ce qui se passe avec une « petite » variation des contraintes et non pas de « grandes » variations. En tout état de cause, il faudra toujours vérifier si la colonne de droite du tableau ne comprend que des nombres positifs pour conclure que la technique « de raccourci » a bien fonctionné.

2. Variation de l'objectif

Supposons maintenant qu'une tache d'encre nous ait fait perdre la dernière ligne du tableau. On se retrouve devant le tableau suivant

Tableau 3

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	2/3	0	−1/3	20
e_2	0	1/2	0	−1/2	1	0	36
x_1	1	1/2	0	−1/6	0	1/3	25
$-Z$	A	B	C	D	E	F	G

Nous savons déjà que la dernière ligne comportera des zéros dans les colonnes associées aux variables de base x_1, x_3, et e_2, c-à-d : $A = C = E = 0$.

Par contre, les nombres B,D,F,G associés aux variables hors base et au second membre sont inconnus. Nous allons alors utiliser une astuce un peu différente que la précédente. On considère comme si on a « oublié » d'appliquer le pivot sur la dernière ligne du tableau.

Cependant, les systèmes d'équations représentés par le premier tableau et le dernier sont équivalents.

Il ne reste plus qu'à transformer le dernier tableau pour faire apparaître, dans la dernière ligne, un 0 dans la colonne de la variable x_1 (premier pivot) ainsi qu'un 0 dans la colonne de la variable x_3 (deuxième pivot).

Complétons le tableau par la ligne que nous voulons obtenir :

Tableau 3

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	2/3	0	−1/3	20
e_2	0	1/2	0	−1/2	1	0	36
x_1	1	1/2	0	−1/6	0	1/3	25
$-Z$	8	5	6	0	0	0	0

Tableau 3'

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	2/3	0	−1/3	20
e_2	0	1/2	0	−1/2	1	0	36
x_1	1	1/2	0	−1/6	0	1/3	25
$-Z$	0	1	6	4/3	0	−8/3	−200

Tableau 3"

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	2/3	0	−1/3	20
e_2	0	1/2	0	−1/2	1	0	36
x_1	1	1/2	0	−1/6	0	1/3	25
$-Z$	0	−5	0	−8/3	0	−2/3	−320

Il apparaît ainsi, qu'il est relativement simple de reconstituer la dernière ligne du tableau.

Reprenons l'histoire de notre fleuriste et supposons que les prix des bouquets varient légèrement, mais qu'il peut toujours en vendre n'importe quelle quantité aux nouveaux prix :

$$\begin{cases} \text{le prix du bouquet de type 1 passe de 8 UM à 9} \\ \text{le prix du bouquet de type 2 passe de 5 UM à 6} \\ \text{le prix du bouquet de type 3 passe de 6 UM à 5} \end{cases}$$

Le problème de notre fleuriste devient :

$$\begin{cases} & & \max\ z = 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 & \\ (e_1) & \text{roses} & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq 90 \\ (e_2) & \text{œillets} & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 81 \\ (e_3) & \text{orchidées} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq 120 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

Le premier tableau du simplexe devient :

Tableau 1

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
e_1	2	3	2	1	0	0	90
e_2	1	2	1	0	1	0	81
e_3	4	3	1	0	0	1	120
$-Z$	9	6	5	0	0	0	0

Si nous appliquons sans réfléchir les mêmes opérations sur ce tableau que celles que nous avons appliquées dans la première partie, nous allons construire progressivement un tableau de la forme :

Tableau 3

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	2/3	0	$-1/3$	20
e_2	0	1/2	0	$-1/2$	1	0	36
x_1	1	1/2	0	$-1/6$	0	1/3	25
$-Z$	9	6	5	0	0	0	0

Tableau 3'

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	2/3	0	$-1/3$	20
e_2	0	1/2	0	$-1/2$	1	0	36
x_1	1	1/2	0	$-1/6$	0	1/3	25
$-Z$	0	3/2	5	3/2	0	-3	-225

Tableau 3"

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	2/3	0	$-1/3$	20
e_2	0	1/2	0	$-1/2$	1	0	36
x_1	1	1/2	0	$-1/6$	0	1/3	25
$-Z$	0	$-7/2$	0	$-11/6$	0	$-4/3$	-325

Il apparaît ainsi, qu'il est relativement simple de reconstituer la dernière ligne du tableau.

Ainsi, on peut résoudre « pratiquement sans calculs » le nouveau problème du fleuriste : il devra composer :

- 25 bouquets N1 ($x_1 = 25$)
- 0 bouquets N2 ($x_2 = 0$)
- 20 bouquets N3 ($x_3 = 20$)
- Il utilisera toutes ses roses ($e_1 = 0$)
- Il lui restera 36 œillets . ($e_2 = 36$)
- Il utilisera toutes ses orchidées ($e_3 = 0$)
- Sa recette sera de 325 ($Z = 325$)

Comme dans la partie précédente, cette méthode n'est pas valable pour tous les systèmes de prix de vente des bouquets : il est faux de penser que quels que soient les prix des bouquets il est optimal de composer 25 bouquets N1, 20 bouquets N3 et aucun bouquets N2.

par exemple, si

$$\begin{cases} \text{le prix du bouquet de type 1 passe de 8 UM à 8} \\ \text{le prix du bouquet de type 2 passe de 5 UM à 7} \\ \text{le prix du bouquet de type 3 passe de 6 UM à 10} \end{cases}$$

Le problème de notre fleuriste devient :

$$\begin{cases} & & \max\ z = 8x_1 + 7x_2 + 10x_3 & \\ (e_1) & \text{roses} & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq 90 \\ (e_2) & \text{œillets} & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 81 \\ (e_3) & \text{orchidées} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq 120 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

Le premier tableau du simplexe devient :

Tableau 1

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
e_1	2	3	2	1	0	0	90
e_2	1	2	1	0	1	0	81
e_3	4	3	1	0	0	1	120
$-Z$	8	7	10	0	0	0	0

Si nous appliquons sans réfléchir les mêmes opérations sur ce tableau que celles que nous avons appliquées dans la première partie, nous allons construire progressivement un tableau de la forme :

Tableau 3

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	$2/3$	0	$-1/3$	20
e_2	0	$1/2$	0	$-1/2$	1	0	36
x_1	1	$1/2$	0	$-1/6$	0	$1/3$	25
$-Z$	8	7	10	0	0	0	0

Tableau 3'

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	$2/3$	0	$-1/3$	20
e_2	0	$1/2$	0	$-1/2$	1	0	36
x_1	1	$1/2$	0	$-1/6$	0	$1/3$	25
$-Z$	0	3	10	$4/3$	0	$-8/3$	-200

Tableau 3"

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	s.m
x_3	0	1	1	$2/3$	0	$-1/3$	20
e_2	0	$1/2$	0	$-1/2$	1	0	36
x_1	1	$1/2$	0	$-1/6$	0	$1/3$	25
$-Z$	0	-7	0	$-16/3$	0	$2/3$	-325

Il apparaît que ce tableau n'est pas optimal. Il est clair que la procédure « de raccourci » que nous avons adopté n'est pas efficace dans ce cas.